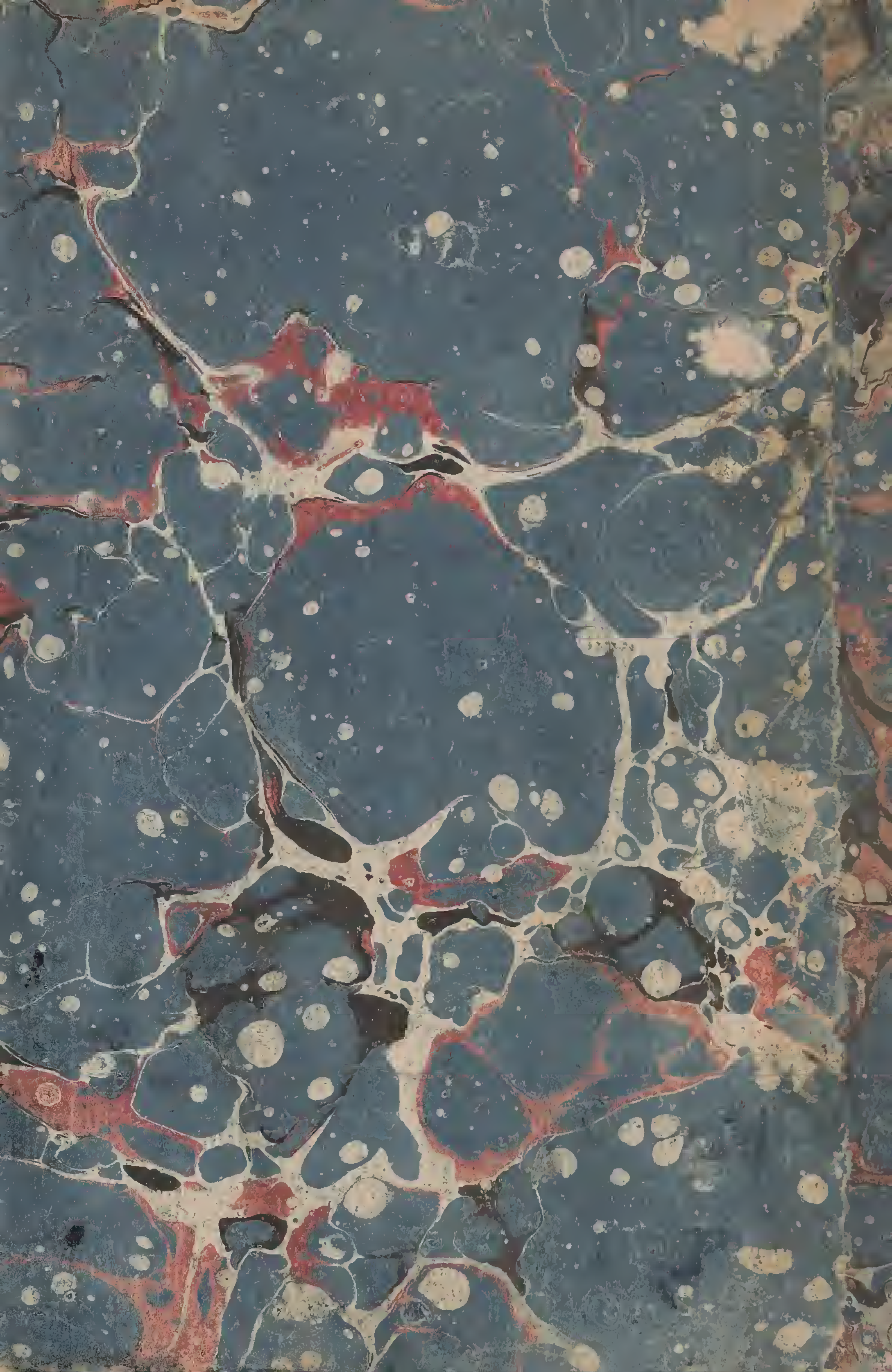


354 pp. et 13 pl. dépliantes imprimées in-fine.

Manuscrit du XVIIIe siècle, entièrement en français, écrit par Louis Cas. Parent, de Fougères, étudiant en philosophie au Collège Royal de Navarre et demeurant à la communauté des philosophes dudit collège.

MANUSCRIT. — MAZEUS (M. de). Célèbre professeur au Collège de Navarre. Philosophiae Pars 4a, seu mathesis proemium. P., 1748, in-8 de 345 pp. + 4 ff. de table, pl. veau de l'époq., dos orné **Bon exemplaire.** (R.23)

Manuscrit du XVIIIe Siècle, entièrement en français malgré le titre, écrit par « Louis Cas. Parent, de Fougères, étudiant en philosophie au Collège Royal de Navarre et demeurant à la communauté des philosophes dudit collège » et consacré entièrement au cours de Géométrie de Mazeus, illustré de nombr. figures dans le texte et de 13 planches dépliantes imprimées in-fine. (Ce cours de Mazeus est inédit).

PHILOSOPHICÆ
PARS 4a
SEU MATHESIS

Philosophiae pars 4a
seu mathesis

PROEMIUM

1o mathesis ē scientia quae versatur circa quantitatem prout mensurandam: nomine ā quantitatis intelligitur illud omne quod est incrementi aut decrementi capax quod pt augeri vel minui, ut extensio, motus, velocitas.

2o mathesis duplex distinguitur alia pura alia mixta: mathesis pura est ea quae considerat quantitatem prout est quantitas praecise et abstracta ab omnibus quantitatibus sensibilibus, nempe duritie, motu quiete, fluiditate &c: mathesis mixta est ea quae considerat quantitatem prout aliqua vestitum qualitate sensibili ut duritie, motus &c.

3o mathesis mixta plures habet species nempe mecanicam, astronomiam, opticam, dioptricam, catoptricam & mathesis pura unicam habet speciem nempe geometriam de qua nobis dicendum est: geometria autem quae considerat quantitatem prout est quantitas praecise et ab omni abstracta qualitate sensibili, et ipsam mensurat.

4o quantitas oīs per limites ac terminos quos tot exterius dividitur ab alia quantitate et hinc dicitur discreta, quantitas non habet intra se limites ac terminos per quos a seipsa dividatur et hub illo rei dicitur quantitas continua: quantitas discreta dicitur aliter arithmetica, quia plures quantitates discretae simul sumptae efficiunt numerum qui est objectum arithmeticae quantitas vero continua dicitur aliter geometrica

quia quantitas continua dat extensionem quae
est objectum geometriae
5o extensio autem triplicem habet dimensionem
nempe longitudinem latitudinem et profunditatem
unde triplex exurgit extensionis species nempe
linea quae ex longitudine, superficies quae est
ex longitudine et latitudine, denique solidum
quod ex longitudine latitudine profunditate consi
stitur: quantitas autem non simul continua est
et discreta quatenus discreta dat numerum
quatenus continua dat extensionem quatenus
discreta simul et continua dat extensionem
terminatam seu figuram
6o figurae sunt objectum geometriae unde finis
et scopus geometriae est mensurare earum
figuras: figuras autem mensurat mensurando
varias earum dimensiones longitudinem lati
tudinem et profunditatem: mensurare magni
tudinem geometricis est idem atque aequare mensura
notabilitudinem est quam aequatio unius cum
altero; ut exemplum, mensurare notabilitudinem
est quam exemplum aequare cum mensurâ
aliquâ certis vicibus repetita ut cum pede sex
vicibus repetito
7o geometria triplex distinguitur, simplex
composita et transcendentalis. geometria sim
plex est illa quae versatur circa figuras recti
lineas; geometria composita est illa quae ver
satur circa lineas curvas sed ordinis infe
rioris; geometria transcendentalis est illa quae
versatur circa lineas curvas sed ordinis supe
rioris; quae de geometria dicturi sumus ea juxta
morem jam communiter receptum et ad pleniorem
dicendorum intelligentiam gallico idiomate exponemus
exponemus.

PREMIER TRAITÉ

De la geometrie simple

1° La geometrie simple a pour objet les figures rectilignes des corps: son but est de les mesurer pour y parvenir; elle considere les differentes dimensions des corps, largeur, longeur, et profondeur, elle en examine les proprietes et les raports et enfin elle parvient a une mesure juste et exacte de ces memes dimensions.

2° la geometrie simple renferme 3 choses, le calcul, La theorie et la pratique; dans le calcul elle donne les fondements d'une mesure juste, finie et precise dans la theorie elle decouvre les proprietes de l'etendue par la demonstration de ses theoremes dans la pratique elle opere sur cette meme etendue par la resolution de ses problemes

Section Ire

DU CALCUL de la geometrie simple

1° Le calcul de la geometrie simple peut estre consideré ou dans ses elements ou dans ses progres ou dans sa fin: les elements du calcul sont le calcul simple des quantites ou des grandeurs le progres du calcul est le calcul du raport de ces memes quantites et il consiste dans la proportion ou l'analogie; la fin du calcul

est le calcul des proportions autrement appellé æquation

2° en effet le but de la geometrie est de parvenir a l'æquation, c'est a dire a egaler une quantité a une autre; on parvient a l'æquation par l'analogie ou la proportion c'est a dire a egaler une quantité a une comparaison des quantités semblables, on parvient a la proportion ou au raport des quantités semblables par le calcul simple des quantités et c'est la tout l'esprit et tout le mystere du calcul comme on le developera encore mieux dans la suite

3° nous allons donc traiter 1° du calcul simple des quantités 2° de l'analogie ou des proportions 3° de l'æquation

Section 2onde

Du calcul simple des quantités

1° le calcul ~~simple des quantités~~ a pour objet comme nous l'avons dit les quantités discretes en tant que discretes car c'est a la geometrie theorique qu'il appartient de considerer les quantités en tant que continues

2° les quantités discretes sont ou determinées ou indeterminées, les quantités determinées sont celles qui expriment une grandeur plutost qu'une autre un pied plutost qu'une toise une etendue de 3 pieds plutost que de 4 & ny plus ny moins ry le chiffre 8 est une quantité determinée parce qu'il represente une quantité de 8 parties plutost que de 7 ou de 9 il exprime ou 8 pieds ou 8 toises ou &c ny plus ny moins.

Les quantités indeterminés sont celles qui expriment une grandeur indeterminée c'est a dire qui n'est pas plutost l'une que l'autre qui n'est pas plutost un mouvement qu'une etendue un pied qu'une force vg la lettre x est une quantité indeterminée parce qu'elle ne represente rien de precis ny de fixe, parce qu'elle ne signifie pas plutost un mouvement qu'un autre un pied plutost qu'une force & mais elle peut designer telle grandeur telle etendue, telle chose que l'on voudra

3° les quantités ou les grandeurs determinées s'expriment par les chiffres 0, 1·2·3·4·5·6·7·8·9: caracteres qui nous sont venus des arabes et les quantités s'appellent nombres, quantités numeriques, quantités arithmetiques, les grandeurs indeterminés s'expriment par les lettres de l'alphabet a· b· c· d· e· f· g· h & parceque ces lettres ne signifient rien d'elles memes elles sont propres a designer et representer tout ce que l'on voudra

4° le calcul des quantités determinées s'appelle calcul des nombres, calcul arithmetique; celuy des quantités indeterminées s'appelle calcul des lettres ou calcul algebrique nous alons exposer l'un et l'autre

Chapitre 1er.

Du calcul des nombres, ou calcul ARITEMETIQUE

1° on definit ordinairement le nombre un assemblage de plusieurs unités vg le chiffre 2 est un nombre parcequ'il est composé de 2 unités; le chiffre 3 est un nombre parcequ'il est composé de 3 unités ainsy du reste

 nous parlerons 1° de la nature des nombres 2° de leurs proprietes 3° des operations dont ils sont susceptibles

Article 1er
De la nature des nombres
Definitions

1° on appelle nombre entier un assemblage de plusieurs unites v.g. le chifre 4, 7, 9 &c

2° on appelle fraction ou nombre fractionaire ou nombre rompu un assemblage de parties d'unites v.g. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4}$ &c (ce qui signifie une moitie, un tiers, une quart, 2 tiers, 3 quarts.) sont autant de fractions; parceque ces quantites expriment des parties de l'unite.

3° dans la fraction le nombre superieur s'appelle numerateur; l'inferieur s'appelle denominateur. celuy cy s'appelle denominateur parcequ'il denomine les parties auxquels le tout est divise, c'est a dire il designe la grandeur de ces parties en exprimant si elles sont ou des moities ou des tiers ou des quarts &c celuy la s'appelle numerateur parcequ'il exprime combien l'on prend de ces parties auxquels le tout est divisé

principe 1er

1° la matiere continument etendue s'appelle unite phisique; unite parcequ'elle est une et qu'elle fait un meme tout phisique parcequ'elle est divisible en plusieurs parties.

2° l'unite phisique est divisible en plusieurs parties qui sont autant d'unites phisiques parceque chacune de ces parties fait un tout continument etendu et qui est du meme divisible en plusieurs parties

7

3o l'unité phisique est seule a proprement parler divisible car le nombre de sa nature est indivisibles: vg le nombre 2 qui signifie qu'un tout a 2 parties d'une certaine grandeur, c'est a dire 2 methes, ne peut se diviser, car le meme tout ne peut avoir que 2 parties d'une certaine grandeur determinée scavoir 2 methes ny plus ny moins; et si l'on peut diviser ulterieurement le nombre ce n'est qu'en regardant chacune des parties dont il est composé comme autant d'unites phisiques qui sont divisibles en d'autres parties mais d'une moindre grandeur que les premieres

principe 2ond espece

1o l'unité phisique est l'origine du nombre car l'origine du nombre est ou l'unité phisique, ou le nombre luy meme il n'y a point de milieu, or le nombre ne peut provenir et tirer son origine primitive d'un autre nombre ulterieur, car le nombre ulterieur doit luy meme tirer son origine d'ailleurs, et cette origine ne peut estre encore un nombre ulterieur, car la question reviendroit toujours et retomberoit dans un projet infini, il faut donc recourir a l'unité phisique comme a l'origine primitive de tous les nombres

2o l'unité phisique contient le nombre en puissance par la divisibilité, car la divisibilité de l'etendue, la rend susceptible de la pluralité de parties, or cette pluralité de parties est le nombre luy meme

3o l'unité phisique contient le nombre en actes par la division actuelle car la division actuelle introduit dans l'unité phisique une pluralité de parties et par consequent le nombre avant la division dans elle il n'y avoit qu'un tout qu'un continu, il n'y avoit

avoit point encore de parties puisqu'il n'y avoit point de division de partitions, de pluralités, donc &

proposition 1ere

La division actuelle de l'unité physique donne les fractions

preuve on appelle fraction une partie de l'unité une partie qui a un certain raport avec le tout, c'est a dire qui en est ou la moitie ou le tiers ou le quart, ou les 2 tiers ou les 3 quarts &c ce qui s'exprime ainsi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ &c or les parties qui proviennent de la division actuelle, sont ou des moities, ou des tiers, ou des quarts &c si supposons le tout divisé en 4 parties egales, chaque partie sera le quart par raport au tout ou sera $\frac{1}{4}$ deux parties prises ensembles en seront la moitie ou $\frac{1}{2}$ trois de ces parties en seront les $\frac{3}{4}$ en sortes que les quatres parties en seront les $\frac{4}{4}$ egales a 1 ou a l'unité, donc &

proposition 2onde

Les fractions considerées dans leur numerateur, sont de veritables nombres

preuve: car les parties de l'unité dont la grandeur est exprimée dans le denominateur est un veritable assemblage de ces unités, parce qu'il designe le nombre que l'on prend de ces parties aux quelles l'on a divisé le tout, donc &

Corollaire 1er

Il y a cette difference entre le nombre entier et la fraction; en ce que le nombre entier exprime seulement le nombre que l'on prend des parties aux quelles l'on a divisé le tout et la fraction exprime non seulement le nombre que l'on prend de ces parties mais de plus en exprime la grandeur et la qualité par son denominateur

2° de plus la fraction exprime le rapport que les parties ont avec le tout, raport qui n'est point exprimé par le nombre entier

Corollaire 2eme

Les nombres entiers ne sont que des fraction qui ont un denominateur commun et sous entendu

preuve en effet lorsqu'on compare entre eux plusieurs nombres vg: 2:4:6:8 on leur sous entend un denominateur commun et qui par cette raison n'a pas besoin d'estre exprimé; car les nombres 2,4,6,8 signifient deux parties, 4 parties, 6 parties d'un meme tout et des parties de meme grandeur et de meme denomination

article 2eme
Des proprietes des nombres
proposition 1ere

tous les nombres sont finis, fixes et determines

preuve 1° l'etendue de soy est indeterminé, vague, infinie, quand on dit qu'un objet a de l'etendue on ne dit rien de fixe de precis, car on ne determine pas si c'est telle et telle etendue: au contraire le nombre fixe est restraint l'etendue vg quand on dit qu'un objet a une etendue de 4 pieds le nombre 4 fixe l'idée generale, et indeterminée de l'etendue a une etendue de 4 pieds ny plus ny moins

2° tout nombre vg 3 exprime 3 parties semblables d'un meme tout ny plus ny moins. il en est ainsi des autres nombres qui tous expriment un assemblage de parties semblables prises dans un tout, or les parties semblables d'un tout, scavoir les moitiés, les tiers, les quarts, &c sont determinées

Corollaire 1er

L'unité est partie aliquote de tout nombre et pareillement tout nombre est multiple de l'unité la preuve en est claire car tout nombre resulte de l'unité prise un certain nombre de fois

Corollaire 2ond

1° le nombre 2ond est partie aliquote de tous les nombres doubles; le nombre 3 est partie aliquote de tous les nombres triples le nombre 5 est partie aliquote de tous les nombres quintuples &c

2° le nombre 2 est partie aliquote de tous les nombres paires; mais le nombre 3 n'est pas partie aliquote de tous les nombres impaires parceque tous les nombres impaires ne sont pas triples

3° c'est pourquoy tous les nombres doubles peuvent estre divisés par deux; tous les nombres triples par trois tous les nombres quintuples par 5 tous les &c

proposition 5eme

tous les nombres pris 2 à deux ont entre eux un raport, une raison une relation

preuve parcequ'ils sont et comparables et commensurables; entant que comparables ils ont une difference entant que commensurables ils ont une mesure commune; et par consequent on peut dire de combien l'un surpasse l'autre ou combien de fois il le contient ce qui s'appelle exprimer le raport, la raison qu'ont entre eux 2 nombres

Scholie

toute raison est une veritable fraction parceque la fraction ne fait qu'exprimer le raport et la raison qui se trouve entre le numerateur et le denominateur comme nous dirons dans la suitte

article 3eme

Des operations sur les nombres

La science qui a pour objet les nombres s'appelle arithmetique: les operation que l'on peut faire sur les nombres se reduisent a 4 qui sont 1° la numeration 2° l'addition et soustraction, 3° la multiplication et la division, 4° l'exaltation et la division.

paragraphe 1er
De la numeration

1° la numeration consiste a scavoir exprimer par le discour une quantite donné en chiffre, et a rendre en chiffre une quantite enoncé dans le discour

2° on appelle chiffre petits caracteres qui nous sont venus des arabes, scavoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui signifient zero, un, deux, trois, quatre, cinq &c

3° de la combinaison de ces dix caracteres depent tout l'art d'exprimer en chiffre les quantites enoncés dans le discour, et d'enoncer par le discour les quantites donnés en chiffre

probleme 1er

exprimer en chiffre des quantites enoncés dans le discour

solution pour exprimer en chiffre les quantites donnes dans le discour il faut remarquer

1° que zero ne signifie rien, mais qu'etant mis immediatement apres un chiffre il rend sa valeur dix fois plus grande parcequ'on est convenu que lorsque des dix caracteres cy dessus ils s'en trouveroit plusieurs de suite, leur valeur augmenteroit en proportion decuple c'est a dire qu'une unite du chiffre precedent vers la gauche seroit dix fois plus grande qu'une unité du chiffre suivant vers la droite. cela posé il sera facile de faire l'enumeration de tous les nombres qui peuvent exprimer des quantites quelconques

2° car commençant par l'unite et ajoutant toujours des zeros pour augmenter sa valeur en proportion decuple nous aurons 1·10·100·1000·10000 &c qui signifie unite, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille &c

3° entre les nombres cy dessus on trouvera le nombre intermediaire en mettant successivement les 9 caracteres a la place de l'unite vg entre 10 et 100 on trouvera 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, qui signifient vingt, trente, quarante

cinquante, & pareillement entre 100 et 1000 on trouvera 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 & 4° de plus ces derniers admettent encore des intermediaires que lon trouvera en mettant successivement les nombres simples ou les 9 caracteres a la place du zero qui y est: entre 10 et 20 on trouvera 11 12 13 14 & qui signifient, onze, douse, treise, quatorse, & 5° enfin combinant toujours les nombres simples avec les composes scavoir ceux qui sont au dessous de 10 avec ceux qui sont au dessus, mettant toujours les chiffres positifs a la place du dernier zero, ou a la place des deux derniers zero, ou a la place & on trouvera tous les nombres que lon voudra 1238.
1011.15 & 101, 102, 105 & 321, 322, & 1900, 1910 &

probleme 2ond

exprimer dans le discour des quantites donnes en chiffre

Solution pour exprimer dans le discour les quantites donnes en chiffres, il faut remarquer,

1° que dans une suitte de chiffres ou de nombres donnes on distingue plusieurs tranches allant de droite a gauche et que chaque tranche est composée de trois ordres ou chiffres

2° la 1ere tranche a droite, des unites, la 2onde s'appelle la tranche des milles la 3eme la tranche des millions, la 4eme celle des milliards la 5eme des billiards et ensuite trilliards &

chaque tranche a trois ordres ou trois chiffres excepte la derniere qui quelquefois na que 2 ou meme un seul chiffre: le premier ordre

est celuy des unites Lezond celuy des dixaines le troisieme celuy des centaines

millions			mille			unites		
3	4	5	8	7	6	3	2	5
centaines	dixaines	unites	centaines	dixaines	unites	centaines	dixaines	unites

345
876
325
1546

4° on commence par la tranche qui est a gauche et l'on enonce le nom propre de chaque tranche a la fin de cette tranche, et on s'abstient de nommer les ordres ou a la place des chifres positifs il se trouve des zero vg 30421 signifie trente mille quatre cent vingt un pareillement le nombre dans l'exemple cy dessus signifie trois cent quarante cinq millions huit cent soixante et seize mille trois cent vingt cinq

paragraphe 2ond

De l'addition et la soustraction

probleme Ier

faire l'addition, ou chercher la somme de plusieurs nombres donnés.

Solution 1° l'addition est une operation dans laquelle on cherche la somme de plusieurs nombres donnes vg les nombres 5 et 7 etant donnes il est facile d'en trouver la somme qui est 12; ce qui s'exprime plus simplement de cette maniere $5 + 7 = 12$ c'est a dire cinq plus sept egalent douse 2° mais si les nombres donnes sont composes il faut les ecrire les uns sous les autres observant de metre

mete les unites sous les unites, les dixaines sous les dixaines les centaines sous les centaines les milles &c

3° on commence par la colone des unites et on en cherche la somme : cette somme s'exprime ou par un nombre simple ou par un nombre composé : si il est simple on l'ecrit sous la colone des unites et l'on passe a celle des dixaines. si il est composé on ecrit le premier chiffre sous la colone des unites, et le second chiffre qui exprime des dixaines par raport au 1er a cause de sa valeur d'ecuple s'ajoute par la pensée a la colone des dixaines dont il faut ensuite chercher la somme pour l'ecrire de la meme maniere que nous venons de dire et continuer toujour de meme jusqu'a la derniere colone. par exemple.

4382	4082
463	463
5370	5070
somme totale 10215	10215

problemme 2ond

faire la soustraction ou chercher la difference de deux nombres donnes

solution 1° la soustraction est une operation inverse de l'addition et qui luy est diametralement opposée dans l'addition on ajoute un nombre a un autre dans la soustraction on retranche un nombre d'un autre; dans l'addition on cherche la somme de deux ou plusieurs

quantites, dans la soustraction on cherche la difference de deux quantites ou l'exces dont l'une surpasse l'autre vg si on veut soustraire le nombre 3 de 9 il reste 6 qui s'appelle difference ou reste, ce qui s'exprime plus simplement de cette maniere 9−3 = 6 9 moins 3 egale 6.

2° lorsque les nombres sont simples la soustraction ne souffre nulle difficulté; lorsqu'ils sont composes on fait la soustraction par parties, comme l'on a fait pour l'addition c'est a dire l'on soustrait les unites des unites, les dixaines des dixaines et sous chaque colone l'on ecrit la difference des deux nombres: remarquant que lorsque le nombre superieur ou celuy dont il faut soustraire est plus petit que l'inferieur, il faut pour lors luy ajouter une unité prise sur le nombre precedent qui se trouve par la diminue d'autant vg.

	897		806.
	753		327
differ....	144	diff....	479

806
327
479

	327
	479
preuve	806

proposition

l'addition et la soustraction sont 2 operations qui se servent reciproquement de preuves

preuve 1° si l'on veut prouver vg que 4 et 3 font 7 il est evident que l'on s'assurera que la somme 7 est juste en faisant voir que 3 retranché de 7 redonne 4

2° la raison en est que l'addition et la soustraction sont 2 operations diametralement opposées et que l'une detruit ce que fait l'autre et par consequent que la soustraction remet les quantites.

dans le meme etat ou elles etoint avant l'addition

paragraphe 3eme

De la multiplication et division

Definition

1° multiplier c'est prendre un nombre quon appelle multiplicande autant de fois qu'il est marqué par un autre nombre qui s'appelle multiplicateur, pour avoir un resultat qui s'appelle produit
2° plus rigoureusement multiplier c'est ajouter le multiplicande a luy meme autant de fois que l'unité se trouve contenue dans le multiplicateur vg si on multiplie 2 par 3 l'on aura 6 car 2 ajouté a luy meme 3 fois donne 6 ce qui s'exprime plus simplement de cette maniere
$2 \times 3 = 6$

Corollaire

il suit de ce que nous avons dit
1° que le multiplicande est autant de fois contenu dans le produit, que l'unité est contenue dans le multiplicateur
2° si le multiplicateur est egal a l'unité le produit sera egal au multiplicande: si le multiplicateur est plus grand que l'unité le produit sera plus grand que le multiplicande et si le multiplicateur est plus petit que l'unité le produit sera plus petit que le multiplicande par ex: 2 multiplie par 3 donne 6 multiplie par un donne 2 multiplie par une demie $\frac{1}{2}$ donne un d'ou il suit que le produit est toujours au multiplicande comme le multiplicateur est a l'unité

2 + x

17 **probleme**

faire une multiplication, cestadire chercher le produit d'un nombre par un autre

Solution 1° si le multiplicande et le multiplicateur sont des nombres simples il ny aura nulle difficulté 4 multiplie par trois donne 12 ou plus court $4 \times 3 = 12$

2° si le multiplicande est un nombre composé, et le multiplicateur un nombre simple il faudra multiplier successivement les unités, les dixaines, les centaines & du multiplicande par le multiplicateur vy

	3421
	3
produit	10263

3° si le multiplicande et le multiplicateur sont des nombres composés, il faudra multiplier tout le multiplicande par chaque chifre du multiplicateur, scavoir par les unites, par les dixaines, par les centaines & du multiplicateur: or le multiplicande multiplie par les unités du multiplicateur donnera un produit d'unités le multiplicande multiplie multiplie par les dixaines du multiplicateur donnera un produit de dixaines, le multiplicande multiplie par les centaines du multiplicateur donnera un produit de centayne ainsi l'on aura differents produits parciels d'unites, de dixaines, de centaines, & qu'il faudra ecrire les uns sous les autres observant de garder les rangs propres a chaque ordre, et en prendre ensuite la somme pour avoir le produit total,

	234
	125
produit d'unités ...	1170
pr: de dixaines ...	4680
pr: de centaines ...	23400
pr total	29250

Définition

La division est une operation inverse de la multiplication et qui luy est diametralement opposé diviser un nombre par un autre c'est chercher combien de fois un nombre que l'on appelle diviseur est contenu dans un autre qu'on appelle dividande ce combien de fois est exprimé par un troisieme nombre que l'on appelle quotien: v.g. 12 divisé par 3 donne 4 ce qui s'exprime plus simplement de cette maniere $\frac{12}{3} = 4$

2° comme dans la multiplication on cherche un produit qui contienne autant de fois le multiplicande, que le multiplicande contient l'unité; dans la division au contraire on cherche un quotien qui soit autant de fois contenu dans le dividande que l'unité est contenue dans le diviseur

3° de meme que la multiplication n'est qu'une addition plusieurs fois reiteré de meme la division n'est qu'une soustraction plusieurs fois reiteré. dans la multiplication on ajoute le multiplicande a luy meme autant de fois qu'il y a d'unites dans le multiplicateur de meme dans la division on retranche le diviseur du dividande autant de fois qu'il y est contenu scavoir autant de fois qu'il y a d'unites dans le quotien

Corollaire

il suit de ce que nous avons dit,

1° que le quotien est contenu dans le dividande autant de fois que l'unite est contenue dans le diviseur et pareillement que le diviseur est contenu dans le dividande autant de fois que l'unite est contenue dans le quotien

2° si le diviseur est plus grand que l'unite, le quotien

sera plus petit que le dividande vg 12 divisé par 3 donne 4 si le diviseur est egal a l'unité le quautien sera egal au dividende vg 12 divisé par 1 donne 12 si le diviseur est plus petit que l'unité le quautien sera plus grand que le dividande 12 divisé par $\frac{1}{2}$ donne 24

3od où il suit que le dividande est toujours au quautien comme le diviseur est a l'unité

probleme

faire une division, c'est a dire chercher le quautien d'un nombre divisé par un autre

Solution 1° si le dividande et le diviseur sont des nombres simples, il n'y a nulle difficulté $\frac{8}{4}=2$; $\frac{6}{2}=3$

2° si le dividande est un nombre composé et le diviseur un nombre simple, il faut diviser chaque chiffre du dividande par le diviseur en commencant par la gauche, et si il se trouve quelquefois un reste apres la division d'un chiffre, ce reste s'ajoute a la pensée au chiffre suivant, qui joint a ce reste, doit estre pareillement divisé, ainsi de suite vg $\frac{443}{2}=221^t\,10^e$

3° si le dividande et le diviseur sont tous deux nombres composes il faut faire la division par parties; c'est a dire, il faut prendre dans le dividande un nombre dans lequel soit contenu le diviseur, on le divise par le diviseur, ou plutost pour abreger par le premier caractere du diviseur, et on ecrit le quautien

4° mais comme il peut arriver qu'il y ait un reste pour le connoitre, on multiplie le quautien par le diviseur, et l'on soustrait le produit du nombre que l'on divise, s'il y a du reste apres la soustraction on ajoute ce reste au chiffre suivant dans le dividande, et ce reste ajouté au chiffre suivant donne un

2ond membre sur lequel on opere comme cy dessus mettant Zero au quautien si le diviseur n'y est pas contenu, ou un chiffre positif, si le diviseur s'y trouve contenu un certain nombre de fois et on continue l'operation de la meme maniere yy Soit on a 8428 a diviser par 24: pour la commodité on ecrit le diviseur a coté du quautiens et l'on opere comme il a été dit, en employant les 3 operations; divisions multiplication et soustraction

dividande........	8428	24
produit.......	72	351 + $\frac{4}{24}$
reste.........	12	
2ond membre.....	122	
produit.......	120	
reste.........	2	
3.eme membre....	28	
produit.......	24	
reste.......	4	

Corollaire 1er.

Le diviseur multiplié par le quautien est egal au dividande car on a retranché le diviseur du dividande autant de fois qu'il y a d'unités dans le quautien donc si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quautien, c'est a dire si l'on multiplie le diviseur par le quautien, on aura un produit egal au dividande.

Corollaire 2ond

La division et la multiplication se servent reciproquement de preuves, car si l'on veut faire voir que $\frac{8}{4}=2$ il n'y a qu'a faire voir que $4\times2=8$ la raison en est que ces deux

operations etant diametralement opposées l'une detruit precisement ce que fait l'autre

paragraphe 3eme
de l'exaltation et de l'extraction
Definition

1° l'exaltation est la multiplication d'un nombre par luy mesme un certain nombre de fois vg si je multiplie 3 par 3 pour avoir le produit 9 cette operation s'appelle exaltation

2° le produit qui resulte de l'exaltation s'appelle puissance; le nombre qui a été multiplié par luy mesme s'appelle racine de cette puissance. Division

on distingue differentes puissances et differentes racines

1° le produit d'un nombre multiplié par l'unité s'appelle 1ere puissance, et sa racine se nomme racine 1ere vg 3×1 = 3 est la 1ere puissance et la 1ere racine du nombre 3

2° le produit d'un nombre multiplié par luy meme s'appelle 2nde puissance ou quarrée et sa racine s'appelle racine 2nde ou racine quarrée 3×3 = 9 est la 2nde puissance ou le quarré du nombre 3 et le nombre 3 est la racine 2nde ou racine quarrée de cette puissance

3° le produit d'un nombre multiplié 2 fois par luy meme s'appelle 3eme puissance ou cube, et sa racine se nomme racine 3eme ou racine cubique, vg 3×3×3 = 27 est la 3eme puissance ou le cube du nombre 3 et ce nombre 3 est la racine 3eme ou cubique de cette puissance 27

4° le produit d'un nombre multiplié trois fois par luy meme s'appelle 4eme puissance ou quarré quarré, et sa racine se nomme racine 4eme ou racine quarrée quarrée vg 3×3×3×3 = 81 s'appelle 4eme puissance s'appelle quarrée quarrée du nombre 3 et le nombre 3

et le nombre 3 la racine 5eme ou quarree quarrée de cette puissance
5o le produit d'un nombre multiplie 4 fois par luy meme s'appelle 5eme puissance ou quarré cube, et sa racine s'appelle racine 5eme ou quarré cubique v.g. 3 X 3 X 3 X 3 X 3 = 243 est la 5eme puissance ou le quarré cube du nombre 3, et le nombre 3 en est la racine 5eme ou quarré cubique.
6o Le produit d'un nombre multiplie 5 fois par luy meme s'appelle 6eme puissance

Corollaire

1o on appelle exposant de la puissance ou de la racine le nombre qui exprime le degré de la puissance ou de la racine v.g. l'exposant de la 1ere puissance et de la premiere racine est ~~premierement l'exposant~~ 1 de la 2onde puissance et de la 2onde racine est 2 l'exposant de la 3eme puissance et de la 3eme racine est 3.
2o d'ou il s'ensuit que pour elever un nombre v.g. 3 a une puissance quelconque il n'y a qu'a le multiplier par luy meme autant de fois moins une qu'il y a d'unites dans l'exposant de la puissance que l'on cherche v.g. pour elever 3 a la 3eme puissance il n'y a qu'a le multiplier 3 fois par luy meme on aura 3 X 3 X 3 X 3 = 81 ou pour avoir une puissance quelconque il faut ecrire la racine autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance et les multipliant les unes par les autres on aura la puissance cherché v.g. 3 X 3 X 3 X 3 = 81 donne la 4eme puissance ou il faut remarquer que la racine 3 se trouve ecrite 4 fois et cette remarque nous servira beaucoup dans les quantites algebriques

Proposition 1ere

l'exaltation est une espece de multiplication
preuve 1o dans l'exaltation de meme que dans la

multiplication, on multiplie un multiplicande par le multiplicateur pour avoir un résultat qui dans la multiplication ordinaire s'appelle produit et dans l'exaltation s'appelle puissance
2° toute la difference qui se trouve entre ces deux operations est que dans la multiplication ordinaire le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres differents, au lieu que dans l'exaltation, le multiplicande et le multiplicateur sont un meme nombre

Definition

1° l'extraction est une operation dans laquelle [on] cherche la racine d'une puissance quelconque donné vg le nombre 9 etant donné, si l'on cherche la racine soit quarrée, soit cubique soit &c de ce nombre, cette operation est appellée extraction
2° c'est pourquoy extraire une racine c'est chercher un nombre qui multiplié par luy meme un certain nombre de fois donne la puissance proposée sur la quelle on opere

Corollaire 1er

1 puisqu'une puissance quelconque vg la 3eme puissance 27 est le produit d'un multiplicande 3 multiplié 2 fois par un multiplicateur 3: par consequent la racine 3eme de 27 doit estre un quotient 3 d'un dividende 27 divisé deux fois par un diviseur 3
2° c'est pourquoy comme dans l'exaltation le multiplicande et le multiplicateur sont un meme nombre, de meme dans l'extraction le diviseur et le quotient sont un meme nombre

Corollaire 2ond

1° c'est pour quoy quand on donne un nombre vg 3 pour en chercher la 3eme puissance, cette puissance est facile a trouver parce que elle est le resultat d'une multiplication dans laquelle on connoit le multiplicande qui est le nombre donné et le multiplicateur qui est le meme que

multiplicande: au contraire quand on donne un nombre v.g. 27 pour en chercher la racine comme cette racine n'est pas facile a trouver, parce qu'elle resulte d'une division dans laquelle on connoit, il est vray le dividande qui est la puissance donné, mais on ne connoit pas le diviseur, parceque ce diviseur est le meme nombre que le quantien que l'on cherche, ou la racine que l'on cherche

2° ainsi la regle generale pour extraire une racine quelconque d'une puissance donné est de chercher un nombre quelconque qui multiplié par luy meme autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans la puissance donné, egale cette puissance ou du moins en approche de plus pres: nous donnerons dans la suitte des regles particulieres pour l'extraction des racines

proposition 2onde

l'extraction est une espece de division

preuve dans l'extraction, comme dans la division il faut diviser un dividande par un diviseur pour avoir un nombre qui dans la division ordinaire s'appelle quantien, et dans l'extraction s'appelle racine

2° toute la difference qui se trouve entre ces deux operations, c'est que dans la division le diviseur est different du quantien, et est connu, au contraire dans l'extraction il est le meme que le quantien que l'on cherche et par la est inconnu

proposition 3eme

L'exaltation et l'extraction sont des operations reciproques, diametralement opposées et qui se servent mutuellement de preuves

preuve car si l'on veut prouver que 3 v.g. est la racine quarrée de 9 il n'y a qu'a faire voir que 9 est le quarré de 3 en elevant le nombre 3 a son quarré qui sera 9

La raison en est que ces deux operations etant opposes l'une detruit precisement cequefait l'autre

Corollaire general

toutes les operations d'arithmetique se reduisent a deux l'addition et la soustraction
preuve 1° dans toute operation arithmetique, il ne s'agit que d'augmenter ou de diminuer une grandeur, or on augmente la grandeur par la voye d'addition, on la diminue par la voye de soustraction donc &
2° la multiplication et l'exaltation ne sont qu'une addition composée de meme la division et l'extraction ne sont qu'une soustraction composée donc &

Chapitre 2ond
Du calcul des lettres; ou calcul algebrique

1° l'algebre est un calcul general, abstrait, indeterminé dont on se sert pour operer sur les quantites indeterminees, de meme que l'on se sert de l'arithmetique pour operer sur les quantites determinées
2° pour representer les quantites indeterminées on se sert des lettres de l'alphabet a, b, c, d, & les quelles ne signifiant rien d'elles memes sont par cette raison propres a exprimer des grandeurs indeterminées
3° les lettres de l'alphabet n'ont d'elles memes aucune valeur dans cette exemple $a+b-ab-acb$ les lettres a, b, c, ne signifient rien de fixe, n'ont aucune valeur precise vg a ne signifie pas plutost 2 que 4 que 8 quelle ne signifie pas plutost un mouvement qu'un repos, une toise qu'un pied, mais il est propre a representer soit l'un soit l'autre; ainsi il est libre de donner a chacune de ces lettres telle valeur que l'on voudra en remarquant que lorsqu'on a donné a une lettre une valeur quelconque dans une operation il faut toujours la luy conserver dans cette meme operation.

2° les quantités sur lesquelles on opere sont de deux sortes, scavoir les quantités connues ou supposées connues et les quantités inconnues les quantités connues s'expriment par les 1eres lettres de l'alphabet a, b, c, d, e, f, &c. et les quantités inconnues par les dernières lettres x y z &

5° pour abreger le discours on se sert en algebre de quelques signes qui sont
Le signe d'addition + qui signifie plus
Le signe de soustraction — qui signifie moins
Le signe de multiplication × qui signifie multiplié par
Le signe de division $\frac{x}{y}$ qui signifie x divisé par y
Le signe d'equation = qui signifie egal a. &...
Le signe de plus grande grandeur > qui signifie plus grand que
Le signe de moindre grandeur < qui signifie moindre que
le signe d'infini ∞ qui signifie infini
Le signe radical √ qui signifie la racine de

6° on appelle termes algebriques une lettre ou plusieurs lettres jointes ensemble, vg a, b, ab, abc, s'appellent termes algebriques on appelle terme positif celuy qui est precedé du signe + vg +a: +b: +ab: +abc &c on appelle terme negatif celuy qui est precedé du signe — vg — a, — b — ab, — abc &c

7° on appelle quantités simples celles qui n'ont qu'un terme, et quantités complexes celles qui sont composées de plusieurs termes, vg + ab — bc a — b + abc

8° on appelle termes semblables ceux qui sont precisement composés de memes lettres; vg dans la quantité + ab — ab + 3ab + abcd, les trois 1ers termes sont

dits estre semblables. les quantités algebrique sont susceptibles des mesmes operations que les quantités numeriques nous allons en parler

Article 1er

De l'addition et soustraction algebrique

Regle 1ere

L'addition des quantités algebriques consiste a escrire les termes algebriques a costé les uns des autres sans toucher aux signes dont ils sont affectés: v.g. pour ajouter + a et + b on escrit simplement a + b pour ajouter abc + ab, - acd, on escrit + abc + ab - acd, et ainsi du reste

Cette regle n'a pas besoin de preuve, elle est evidente par elle mesme

Corollaire 1er

dans l'addition algebrique il se fait quelquefois une veritable soustraction v.g. quand on ajoute ensemble la quantité positive + ab et la negative - bc, pour avoir la somme + ab - bc on soustrait reellement la quantité bc de la quantité ab

Corollaire 2eme

1° pour abreger, au lieu de a + a on escrit 2a au lieu de b + b + b - ac - ac on escrit 3b - 2ac, et ainsi des autres: ce chiffre qui precede les termes algebriques s'appelle coefficient et sert a exprimer combien de fois le mesme terme doit estre escrit, ou ajouté a luy mesme; cette methode d'abreger les expressions algebrique s'appelle reduction et elle ne peut avoir lieu que lorsque les termes sont semblables c'est pourquoy a + b n'est pas la mesme chose que 2ab

2° Il suit de ce que nous venons de dire que $2^a + 4^a$ se reduisent pareillement a 6^a que $-a - 2a - 5a$ se reduisent a -8^a ainsi lorsque les signes des quantites sont les memes La reduction se fait en ajoutant Les coefficiants

3° mais les termes $+a - a$ se detruisent et deviennent zero parce qu'une grandeur retranchée d'elle meme devient nulle: d'ou il suit que $+4^a - 2^a$ se reduisent a $+2^a$; que $8ab - 5^{ab}$ deviennent $+3^{ab}$; que $5ac + ac$ deviennent -4^{ac} ainsi Lorsque les signes sont differents, la reduction se fait en retranchant le plus petit coefficiant du plus grand

Remarqués 2° que lorsqu'un terme algebrique n'est affecté d'aucun signe, il faut luy sousentendre le signe + abc est la meme chose que + abc

Regle 2^{onde}

La soustraction algebrique se fait en ecrivant Les quantites algebriques a coté l'une de l'autre en changeant les signes de la quantité que l'on soustrait les + en − et les − en + ainsi pour soustraire + a de + b on ecrit + b − a pour soustraire ab + cd de la quantité bc + cb on ecrit bc + cd − ab − cd

Preuve dans la soustraction algebrique on change Le signe de la quantité de la quantité a soustraire les + en − et les − en + La raison en est 1° que celuy qui soustrait une quantité negative d'une quantité quelconque rend celle cy moins negative de toute la quantité soustraite, et par consequent plus positive de toute la meme quantité donc le plus doit estre changé en − l'exemple est tres sensible dans les nombres de

si de 12 je soustrait + 6 − 3 je dois ecrire 12 − 6 + 3 = 9 et non pas 12 − 6 − 3 = 3 car lorsque je soustrait 6 − 3 je ne dois pas retrancher le nombre 6 tout entier mais le nombre 6 diminué du nombre 3, cest a dire je dois retrancher 3 seulement donc &

2° la raison cy dessus prise au contraire fait voir que l'on soustrait une quantité positive d'une quantité quelconque le + doit estre changé en −

Corollaire

pour abreger l'expression, apres la soustraction faite, il faut reduire les termes semblables, lorsqu'il s'en trouve: et generalement apres toute operation algebrique il faut faire cette reduction toutes les fois qu'elle a lieu

article 2 ond

De la multiplication et division algebrique

Regle 1ere

1° la multiplication algebrique se fait en joignant le multipliande et le multiplicateur par le signe de multiplication: pour multiplier a par b on ecrit a × b, ou plus simplement ab car en algebre a × b = ab pareillement ab × ab = aabb, observant de mettre pour l'ordre et la clarté les memes lettres a costé les unes des autres

2° si le multipliande et le multiplicateur sont des quantités complexes, on opere comme dans les nombres en multipliant tout le multipliande par chaque terme du multiplicateur ainsi a + b × a + b = aa + ab + ab + bb, qui par la reduction devient aa + 2ab + bb

3° si les quantités que l'on multiplie sont affectées

de coefficients on multiplie les coefficients les uns par les autres vg. $3a \times 2b = 6ab$ La raison est que $3a = a + a + a$ et $2b = b + b$, or $a + a + a \times b + b = ab + ab + ab + ab + ab + ab$ mais par la reduction on aura $ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$ donc

Corollaire 1er.

1° si l'on multiplie une quantité par elle meme vg. a par a on aura $a \times a = aa$ et pour abreger au lieu de aa on ecrit a^2 le chiffre 2 qui est au dessus s'appelle exposant, et sert a exprimer combien de fois une meme lettre doit estre ecrite

2° pareillement au lieu de aaa, a^3 on a par la meme raison aa, bbb, cc, a^2 b^3 c^2 ainsi du reste

3° il y a de la difference entre le coefficient et l'exposant vg. entre $4a$ et a^4 car $4a = a + a + a + a$ qui est une somme au lieu que $a^4 = aaaa$ qui est le produit. un coefficient denote une addition, et l'exposant une multiplication.

Corollaire 2eme

si les quantités que l'on multiplie sont affectés d'exposant, on abrege l'operation en ajoutant l'exposant vg. $a^3 \times a^2 = a^5$ la raison en est que $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$

regle 2onde

1° si le multiplicande et le multiplicateur ont les signes plus le produit doit avoir le signe + vg. $+a \times +b = +ab$ car une quantité positive multipliée par une quantité positive donne un produit positive ainsi $+ \times + = +$ c'est a dire plus par plus donne plus

2° s'ils ont differents signes l'un le signe + et l'autre le signe −, le produit doit avoir le signe − vg.

$+a \times -b = -ab$; La raison en est sensible dans les nombres, car $5-4 \times 6 = 30-24$ et non pas $30+24$; en effet $5-4 \times 6 = 1 \times 6 = 6$ ainsi $-\times +$ ou $+\times - = -$ c'est a dire moins par plus ou plus par moins donne moins.

3° si le multiplicande et le multiplicateur ont tous deux le signe $-$ le produit doit avoir le signe $+$ v.g. $-a \times -b = +ab$. la raison en est sensible dans les nombres, v.g. $6-2 \times 4-2 = 24-8-12+4$, ou vous voyes que le produit de -2 par -2 est non pas -4 mais $+4$ car le multiplicande $6-2=4$ pareillement le multiplicateur $4-2=2$, or $4 \times 2 = 24-8-12+4 = 8$, donc ainsi $-\times - = +$, c'est a dire moins par moins egale moins

4° en un mot Lorsque les signes du multiplicande et du multiplicateur sont les memes, le produit a le signe $+$ & lorsqu'ils sont differents, il a le signe $-$: et la raison ulterieure en est que la multiplication etant une addition reiterée, cette addition se fait par voix de soustraction Lorsque le signe $-$ s'y trouve ainsi multiplier a par -4 c'est ajouter a -4 fois c'est a dire le soustraire 4 fois, ainsi l'on doit avoir $-a-a-a-a = +4a$: pareillement $-a$ par $+4$ c'est ajouter $-a$ quatre fois, c'est a dire c'est soustraire $-a$ quatre fois et par consequent c'est ajouter a 4 fois, car soustraire le moins c'est ajouter, ainsi l'on doit avoir $+a+a+a+a = +4a$

Regle 3eme

La division algebrique est precisement le contraire

de la multiplication ainsi pour diviser algebriquement, il faut precisement prendre l'opposé de la multiplication d'où il suit

1° si le dividande et le diviseur sont affectés de coefficiants, il faut diviser les coefficiants par la raison contraire a celle pour laquelle on les multiplie dans la multiplication c'est pourquoy $\frac{4a}{2a} = 2b$

2° si le dividande et le diviseur sont des termes semblables affectés d'exposants, il faut soustraire les exposants par une raison contraire a celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication; c'est pourquoy si l'on a dans la multiplication $a^4 \times a^2 = a^6$ l'on aura au contraire dans la division $\frac{a^6}{a^2} = a^4$

3° de meme que dans la multiplication, on ecrit les lettres du multiplicateur a coste de celle du multiplicande pour avoir le produit au contraire dans la division on efface les lettres du diviseur dans le dividande et le reste donne le quotien vg comme l'on a $a \times b = ab$, l'on aura dans la division $\frac{ab}{a} = b$ de meme $\frac{aabc}{aa} = bc$ ainsi l'on divise les lettres en effacant celles qui sont communes au dividande et au diviseur

4° si le dividande et le diviseur sont affectés des memes signes, le quotien aura le signe + si ils sont differents signes, le quotien aura le signe −, vg divisant 12 par −3, le quotien doit estre −4 et non pas +4; car multipliant le quotien +4 par le diviseur −3 on auroit +12 qui n'est pas le dividande au contraire $-4 \times -3 = +12$ qui est le veritable dividande.

Corollaires

1° si le dividende est une quantité complexe, et le diviseur une quantité incomplexe on divise chaque terme du dividende, par la quantité incomplexe et on écrit le quotient; que l'on éprouve en le multipliant par le diviseur et soustrayant le produit du dividende comme dans la division numerique observant seulement de plus qu'après chaque soustraction on fait la reduction des termes semblables

2° si le dividende et le diviseur sont des quantités complexes on opere comme dans la division numerique, observant seulement de plus qu'il faut employer la reduction

3° il arrive fort souvent qu'on ne peut pas achever et consommer la division algebrique parce qu'il ne se trouve pas des lettres communes au dividende et au diviseur en ce cas l'on se contente d'indiquer la division

4° pour s'exercer a faire des divisions algebriques des quantités complexes sans qu'il se trouve de reste, ny d'obstacle pour consommer la division il n'y a qu'a multiplier une quantité complexe par une autre, et diviser le produit par le multiplicateur &c

multiplication

$3ab+bc$,
$2b-a$
$6abb+2bbc$
$-3aab-abc$
$6abb+2bbc-3aab-abc$

division

$6abb+2bbc-3aab-abc = 3ab+bc$
$2b-a$

Corollaire 2ond

$\frac{a}{a}=1$: car une quantité est contenue une fois dans elle meme

article 3eme

De l'exaltation et extraction algebrique

Regle 1ere

1° pour elever une quantité a une puissance quelquonque, il faut la multiplier par elle meme autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; vg pour elever a a la 2onde puissance, il faut multiplier a une fois par luy meme et on aura aa ou a^2

2° c'est icy le meme principe dont nous nous sommes servis dans les nombres vg pour elever 4 a la 2onde puissance il faut multiplier le nombre 4 une fois par luy meme pour avoir 16, de meme pour elever a a la 2onde puissance, il faut

Corollaire 1er.

1° La 1ere puissance de a sera donc a ou a^1; la 2onde ou le quarré de a sera $aa = a^2$; la 3eme puissance ou le cube de a sera $aaa = a^3$; la 4eme puissance ou le quarré quarré de a sera $aaaa = a^4$ &c

2° il suit que pour elever un terme algebrique a une puissance quelquonque, il n'y a qu'a l'affecter d'un exposant qui exprime le degré de la puissance; vg la 6eme puissance des quantités a, ab, cd, sera a^6, a^6, b^6, c^6, d^6, &c-

Corollaire 2onde

pour elever a une puissance quelquonque une quantité affecté d'un exposant, il n'y a qu'a multiplier l'exposant de la quantité par l'exposant de la puissance vg pour elever a^2 a la 3eme puissance j'ecris

$a^2 \times 3 = a^6$; La raison en est que la 3eme
puissance de a^2 est $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = a^6$

Corollaire 3eme

1° pour elever une quantité complexe, v.g. a+b a une puissance quelconque, ou bien l'on se contente d'indiquer la puissance et pour lors l'on ecrit simplement $\overline{a+b}^2$ pour la 2onde puissance, $\overline{a+b}^3$ pour la 3eme puissance &c; ou bien l'on veut atteindre a la puissance reelle de la quantité; et pour lors on multiplie la quantité par elle meme une fois, 2 fois, 3 fois, &c selon le degré de la puissance & v.g. la 2onde puissance de a+b est $a^2 + 2ab + b^2$

2° nous donnerons dans la suitte des methodes abregées pour elever une quantité complexe a une puissance quelconque.

Regle 2onde

L'extraction des racines est une operation inverse de l'exaltation: c'est pourquoy si pour elever une quantité a une puissance quelconque il n'y a qu'a multiplier son exposant par l'exposant de la puissance, de meme pour extraire une racine quelconque il n'y a qu'a diviser l'exposant de la racine 2onde, 3eme, 4eme, & v.g. la 3eme puissance de a ou a^1 est $a^1 \times 3 = a^3$ de meme la racine 3eme de a^3 sera $\frac{a^3}{3} = a^1 = a$ car de meme que la 3eme puissance de a est $a^1 \times a^1 \times a^1 = a^{1+1+1} = a^3$; ainsi la 3eme racine de a^3 est $\frac{a^3}{a^1 + a^1} = a^{3-1-1} = a^1$

Corollaire 1er

1° si l'on veut extraire la racine d'une quantité

complexe, on opere de la maniere que sur les nombres

2° si l'on ne peut point trouver la racine juste d'une quantité complexe comme de abc, on se contente de l'indiquer en se servant du signe radical $\sqrt{}$ qui signifie racine 2onde 3eme 4eme & suivant qu'il est affecté de l'exposant 2, 3, 4, &c. vy la racine 2onde de abc, est $\sqrt[2]{abc}$ ou simplement $\sqrt{abc}$; la racine 3eme de abc est $\sqrt[3]{abc}$, sa racine 4eme est $\sqrt[4]{abc}$, &c.

3° on se sert du meme signe radical toutes les fois qu'on ne veut simplement qu'indiquer la racine, vy la racine 3eme de a^3 est $\sqrt[3]{a^3}$

Corollaire 2ond

1° au lieu de se servir du signe radical, on peut exprimer la racine d'une façon plus commode pour le calcul, en donnant à la quantité une fraction pour exposant, vy au lieu de $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, & on peut ecrire $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, et cette maniere d'exprimer les racines dont est auteur Newton, est tres belle, et tres commode dans le calcul, comme nous le verrons dans la suitte: la raison pour laquelle $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$ est que a etant la puissance dont on cherche vy la racine 2onde, $a^{\frac{1}{2}}$ se trouve etre cette racine 2onde car cette racine $a^{\frac{1}{2}}$ multipliée par elle meme donnera la puissance a, en effet $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$

2° par la meme raison si l'on avoit $\sqrt[\frac{1}{2}]{a}$ $\sqrt[\frac{1}{3}]{a}$ $\sqrt[\frac{1}{4}]{a}$ & l'on pourroit ecrire a^2, a^3, a^4, & car de meme que $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ ainsi l'expression $\sqrt[\frac{1}{2}]{}$ $\sqrt[\frac{1}{3}]{}$ $\sqrt[\frac{1}{4}]{}$ ...

Corollaire 3eme 37

1° il suit de tout ce que nous avons dit que $\frac{a^3}{a} = a^2$; que $\frac{a^2}{a} = a$; que pareillement $\frac{a}{a} = 1 = a^0$, il faut remarquer cette derniere expression: en effet $\frac{a}{a} = 1 - 1\ a^0$ d'ailleurs $\frac{a}{a} = 1$ puisque toute quantité est une fois contenue dans elle meme, donc $a^0 = 1 = \frac{a}{a}$

2° ainsi l'on peut exprimer la suitte de toutes les puissances de a dans cette ordre $a^0\ a^1\ a^2\ a^8\ a^9$ &c. l'on peut exprimer la suitte de toutes les racines de a dans cette ordre

$\sqrt[0]{a}$, $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{a}$ $\sqrt[6]{a}$ $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt[8]{a}$ $\sqrt[9]{a}$ &c.

ou bien au lieu de se servir du signe radical l'on peut se servir des exposants fractionaires de cette maniere

$a^{\frac{1}{0}}$, $a^{\frac{1}{1}}$ $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$ $a^{\frac{1}{6}}$, $a^{\frac{1}{7}}$, $a^{\frac{1}{8}}$, $a^{\frac{1}{9}}$, $a^{\frac{1}{10}}$ &c.

Section 3eme

De l'analogie ou des proportions

si l'on compare deux quantités elles ont entre elles un certain rapport de plus grande, ou de moindre grandeur ou egale et ce rapport s'appelle raison si deux raisons sont egales, cette egalité s'appelle analogie ou proportion; si l'on a une suitte de raisons egales, cette suitte s'appelle progression.

2° nous parlerons 1° des raisons 2° des proportions 3° des progressions. - - - - - -

Chapitre 1er
Des raisons.

1° une raison est le raport de deux quantités que l'on compare entre elles; Lorsqu'on compare une quantité moindre que l'unité avec l'unité pour savoir le raport qui se trouve entre l'une et l'autre alors la raison s'appelle fraction.

2° il est evident que toute fraction est une raison, mais une raison n'est dite fraction que lorsqu'elle compare une partie de l'unité avec l'unité

3° nous parlerons 1° de la nature et des proprietés des raisons, 2° de la nature et des proprietés des fractions

article 1er
De la nature et des proprietés des raisons

proposition 1ere

toutes les quantités homogenes pris deux a deux ont entre elles un raport une raison

preuve parceque deux quantités comparées entre elles, ont une difference, ou un quotien, vg 6 et 4 ont une difference qui est 4, ou un quotien qui est 2 or la difference de deux quantités ~~ou le quotien~~ ou quotien de deux quantités exprime la raison ou le raport de ces deux quantités donc &

scholie 1° les raison ou les raports s'expriment ainsi $\frac{2}{3}, \frac{3}{14}, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ou encore de cette maniere 2·3 3·4 b·a c·d

2° toute raison est composé de deux termes car il ne peut y

avoir comparaison qu'il entre deux, le premier terme s'appelle antecedent le 2ond consequent

proposition 2onde

toute raison est ou arithmetique ou geometrique

preuve lors qu'on compare deux quantités ou bien l'on cherche la difference ou l'excés dont l'antecedent surpasse le consequent ou en est surpassé ors la raison s'appelle raison arithmetique: ou bien l'on cherche combien de fois le consequent est contenu dans l'antecedent, ou ce qui est la meme chose on cherche le quotient de l'antecedent divisé par le consequent, et pour lors la raison s'appelle geometrique

Corollaire

La valeur de la raison arithmetique est la difference du consequent soustrait de l'antecedent. La valeur de la raison geometrique est le quotient de l'antecedent divisé par le consequent

Scholie

1° Les raisons geometriques prenent differents noms selon le raport de l'antecedent ou consequent. la raison de 2·1, s'appelle double; de 3·1 s'appelle triple; de 4·1 s'appelle quadruple, de 2·3 sous sesquialtaire, ainsi du reste

2° La raison geometrique s'appelle raison d'egalité, lorsque l'antecedent et le consequent sont egaux vg 2·2, 3·3, a·a, b·b, & elle s'appelle raison d'inegalité, lorsque l'antecedent et le consequent sont inegaux vg 3·4·5·8, a·b, c·f, &

proposition 3eme

toute raison geometrique est ou simple ou composée

preuve on appelle raison simple le raport ou la

comparaison de deux quantités on appelle raison composée, une raison qui resulte de deux ou plusieurs raisons simples multipliées les unes par les autres les antecedents par les antecedents et les consequents par les consequents; c'est toute raison geometrique qui resulte de l'une de ses deux ... vg la raison $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ est simple, mais la raison $\frac{6}{20}$ est composée par ce qu'elle resulte de deux raisons simples $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ multipliée l'un par l'autre antecedent par antecedent consequent par consequent car $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{4\times5}=\frac{6}{20}$ pareillement $\frac{aab}{ccd}$ est composée de trois raisons simples $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, donc

Corollaire

1° toute raison composée de raisons simples et inegales s'appelle seulement raison composée de raison multiple; telle est la raison $\frac{6}{20}$, qui est composée de deux raison $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ inegales entre elles

2° toute raison composée de deux raisons egales et simples s'appelle raison redouble; telle est la raison $\frac{8}{27}$ qui est composée des raisons egales $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$. telle est raison $\frac{aa}{bb}$ qui est composée des raisons egales $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}$

3° une raison composée de deux raisons egales s'appelle double; vg la raison $\frac{4}{9}$ est double des raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ une raison composée de trois raisons egales s'appelle triplée vg $\frac{8}{27}$ est une raison triplée des raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raison composée de

quatres raisons egales s'appelle quadruplée vg $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}$
est une raison quadruplé des raisons $\frac{aaaa}{bbbb}$ &c.

propostion 4eme

toute raison composée est ou directe, ou bien reciproque, renversé, inverse,
preuve 1° si je multiplie les deux raisons, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre, antecedent par antecedent, consequent par consequent, pour avoir la raison composé $\frac{6}{20}$ cette raison $\frac{6}{20}$ s'appelle composée est directe des raisons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$
2° mais si je multiplie le deux raisons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre, multipliant non les antecedents par les antecedents et les consequents par les consequens mais l'antecedent de l'une par consequent de l'autre, et reciproquement la raison qui en resultera sera $\frac{10}{12}$ et elle est raison composée reciproque, inverse, renversé des deux raisons simples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$

propostion 5eme

si les raisons simples, (qu'on appelle aussi raisons composantes), sont egales entre elles la raison qui en sera reciproquement composée, sera une raison d'egalité; vg la raison reciproquement composée, des deux raisons egales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ sera $\frac{12}{12}$ qui est une raison d'egalité ce qui arrive a cause de la compensation qui se trouve entre les multiplicateurs et les multiplicandes dans le cas de raisons egales, compesation qui donne des produits egaux;
scholie cette proposition sera enoncée dans la suitte sont d'autres expressions, lorsque nous dirons que dans toute proportion geometrique, le produit des extremes est egal au produit des moyens.

Corollaire 1er

1o touts les nombres pris deux a deux ont entre eux une raison geometrique parceque l'un est toujours un terme un certain nombre de fois dans l'autre, car deux nombres ont toujours une partie aliquote qui leur sert de mesure commune scavoir l'unité au moins; et c'est par cette raison que les nombres sont dits estre rationels, commensurables,

2o il y a des quantités qui, comme nous le verrons dans la suitte, n'ont entre elles aucun raport geometrique, et qui pour cette raison sont appellées quantités irrationels ou incommensurables, tel est le coté du quarré comparé avec la diagonale, parcequ'elle n'ont nulle partie aliquote commune qui puisse les mesurer.

3o parceque touts les nombres sont commensurables entre eux, on dit que deux quantités sont commensurables lorsqu'elles sont entre elles comme nombre a nombre c'y comme 2 a 3, ou comme 3 a 4 ou comme 8 et au contraire lorsqu'elles ne sont point comme nombre a nombre, elles sont pour lors irrationels, ou incommensurables

Corollaire 2end

1o touts les finis sont rationels ou commensurables, parcequ'ils sont entre eux comme nombre a nombre

2o l'infini est incommensurable avec le fini, parcequ'ils n'ont nulle mesure commune

3o l'infini est incommensurable avec le nombre parceque tout nombre est essentiellement fini

Corollaire 3eme

La mesure commune, la partie aliquote commune de toutes les quantités rationels et commensurables est l'unité arithmetique c'est a dire l'unité regardée

comme indivisible; la raison en est que toute mesure doit estre simple et indivisible, sans quoy elle auroit besoin elle meme d'estre mesurée, or cette mesure simple est l'unité arithmetique, plutost que l'unité geometrique, parceque celle cy est regardée comme divisible, et par la n'est pas mesure simple

article 2ond

De la nature des proprietes des fractions.

1o une fraction est un nombre qui exprime le raport d'une partie a son tout, et c'est pour cela que la fraction est comme nous l'avons dit, une raison geometrique

2o ce qui s'appelle antecedent et consequent dans une raison, s'appelle numerateur et denominateur dans la fraction

3o comme la valeur de la raison geometrique, est le quotient de l'antecedent divisé par le consequent de meme la valeur de la fraction est le quotient du denominateur divisé par le denominateur.

4o toute quantité consideré comme partie de l'unité est des lors une fraction vy regardant la livre comme l'unité, le sol est une fraction, parceque il est la vingtieme partie de l'unité ce qui s'exprime par $\frac{1}{20}$ de meme regardant le sol comme l'unité le denier est une fraction parceque il est la douzieme partie du sol ce qui s'exprime par $\frac{1}{12}$

5o Les fractions sont susceptibles de toutes les operations des nombres entiers et de plus ont des operations preliminaires qui leur sont propres et particulieres

paragraphe 1er.

Des operations preliminaires sur les fractions.

Les operations preliminaires sur les fractions sont

A 4

differents changements qu'on leur fait subir sans en changer la valeur, pour en rendre le calcul et la comparaison plus commode: ces operations preliminaires se reduisent a deux qui sont la transformation et la reduction

regle 1re

1° la transformation des fractions se fait soit en multipliant, soit en divisant le numerateur et le denominateur par une meme quantité; v.g. multipliant par deux les termes de la fraction $\frac{1}{2}$ l'on aura $\frac{2}{4}$ en divisant par deux les termes de la fraction $\frac{2}{4}$ l'on aura $\frac{1}{2}$

le 1er cas

2° dans l'expression de la fraction devient plus composée; dans le 2ond cas elle devient plus simple, et reduit la fraction a de plus simples termes, et meme aux termes les plus simples qu'il soit possible lorsqu'on divise par le plus grand commun diviseur c'est a dire par la plus grande quantité qui puisse diviser sans reste les deux termes de la fraction

3° dans l'un et l'autre cas l'expression de la fraction change, mais sa valeur ne change pas, parceque le rapport qui est entre le numerateur et le denominateur de la fraction reste toujours le meme; en effet multipliant toujours par 2 l'on aura $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}$ et en divisant toujours par 2 l'on aura $\frac{16}{32}=\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Corollaire

de la suit la methode

1° de reduire un entier en fraction, ce qui se fait en multipliant l'entier par le denominateur qu'on veut luy donner, v.g. $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}$ &c

de meme $a=\frac{a}{1}=\frac{aa}{a}=\frac{a^3}{a^2}$

2° de reduire une fraction en entier ce qui se fait en divisant le numerateur par le denominateur, lorsque la division est possible; v.g. $\frac{8}{4}=2$, $\frac{aa}{a}=a$ &c

Regle 2onde

La reduction des fractions est une transformation des fractions soit a un denominateur commun soit a un denominateur quelconque

1° on reduit les fractions a un denominateur commun, en multipliant les termes de chaque fraction par le denominateur de l'autre fraction s'il n'y a que deux fractions, ou par le produit des denominateurs des autres fractions s'il y en a plusieurs vg $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ se reduisent $\frac{1\times 4}{3\times 3}=\frac{4}{12}$ et $\frac{1\times 4}{4\times 3}=\frac{3}{12}$, pareillement $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}, \frac{e}{f}$ se reduisent a $\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}$

2° on reduit une fraction vg $\frac{1}{2}$ a un denominateur quelconque donné vg 4 en multipliant les termes de la fraction par le denominateur donné 4 ce qui donne $\frac{4}{8}$, et divisant ensuite les deux termes par le denominateur 2 de la fraction ce qui donne $\frac{2}{4}$ ou le denominateur est 4 cette reduction s'appelle evaluation et sert a evaluer les fractions en parties connues vg les livres en sols, ou en parties vingtiemes, les sols en deniers ou en parties douziemes

3° dans l'une et l'autre cas les fractions ne changent pas de valeur, parce que dans toutes ces transformations, on ne fait que multiplier ou diviser par une meme quantité les deux termes de la fraction, ce qui ne change pas la valeur

paragraphe 2ond

Du calcul des fractions

1° une meme fraction peut estre representé sous differentes expressions vg un sol peut estre regardé comme la vingtieme partie de la livre ou comme un nombre composé luy meme de parties dans le 1er cas un sol

s'exprime par $\frac{1}{2^o}$ dans le 2ond il s'exprime par 1
2° dans le premier cas la fraction est une fraction
ordinaire dans le 2ond cas elle donne une autre espece
de fraction dont le calcul est different nous allons parler
du calcul de l'une et l'autre espece de fraction

nombre ver.

Du Calcul des fractions ordinaires

Le calcul des fractions, consiste dans les operations ordinaires d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'exaltation et d'extraction

Regle 1ere

l'addition et la soustraction des fractions se fait 1o en reduisant les fractions au meme denominateur 2° en prenant la somme ou la difference des numerateurs vy $\frac{2}{3} \times \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$ de meme $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$ Regle 2onde

1° La multiplication des fractions par un entier se fait en multipliant le numerateur de la fraction par l'entier; car la fraction $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2}$ devient double son numerateur devenant double et le denominateur restant le meme

2° La multiplication d'une fraction par une fraction se fait en multipliant le numerateur par le numerateur, et le denominateur par le denominateur vy $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$; La raison est que les fractions sont des raports donc par consequent pour avoir le produit, il faut multiplier les antecedents par les antecedents, et les consequents par les consequents.

Regle 3eme

1° la division des fractions par un entier se fait en divisant le numerateur ou bien en multipliant le denominateur par l'entier, v.g. $\frac{1}{2}$ divisé par 2 donne $\frac{1}{4}$ qui devient sous double parceque son denominateur est devenu double

2° La division d'une fraction par une autre se fait en multipliant (comme l'on dit) en croix les termes d'une fraction par les termes de l'autre s'çavoir l'antecedent et le consequent de l'une par le consequent et l'antecedent de l'autre v.g. $\frac{4}{3}$ divisé par $\frac{2}{6}$ font $\frac{4}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{24}{6}$ la raison en est claire s'il falloit diviser $\frac{4}{3}$ par 2 on auroit $\frac{4}{6}$, mais ce quotient est trop petit, parceque le diviseur n'est pas 2 mais $\frac{2}{6}$ qui est six fois moindre, il faut donc de plus multiplier le numerateur 4 par le denominateur 6 afin d'avoir le produit $\frac{24}{6}$ six fois plus grand que le precedent.

1° c'est une meme chose de diviser le numerateur, ou de multiplier le denominateur; car dans ces cas on rend la fraction plus petite de toute la quantité qui divise ou multiplie

2° c'est pareillement une meme chose de multiplier le numerateur ou de diviser le denominateur d'une fraction; car dans ce cas la fraction devient plus grande de toute la quantité &

regle 4eme

1° l'exaltation d'une fraction a une puissance

quelconque se fait en elevant le numerateur et le denominateur chacun a la puissance proposée vg Le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$ car le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; de meme le cube de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

2° l'extraction des fraction se fait en prenant la racine tant du nominateur que du denominateur vg $\frac{2}{3}$ est la racine quarrée de $\frac{4}{9}$ et la racine cubique de $\frac{8}{27}$. Lors qu'il n'est pas possible d'extraire la racine, on l'indiquer par le signe radical vg la racine quarrée $\frac{1}{3}$ est $\sqrt{\frac{1}{3}}$

Corollaire 1er.

1° les fractions decroissent dans l'exaltation, et croissent dans l'extraction; c'est a dire que dans la fraction la racine est plus grande que la puissance; vg la racine $\frac{1}{2}$ est plus grande que le quarré $\frac{1}{4}$ que le cube $\frac{1}{8}$ &c car une moitié est plus grande qu'un quart un quart est plus grand que un huitieme &c

2° mais cela n'est vray qu'arithmetiquement, et lorsqu'il s'agit de nombres; car geometriquement et lorsqu'il s'agit de l'etendue la fraction racine est toujour plus petite: en effet soit la fig 23 la ligne $AB = 1$ divisé au point f g h en parties $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, elevant la ligne entiere et chacune de ses parties au quarreé, nous aurons pour racine

$1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ &c et nous aurons pour quarré
$1 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{6} \frac{1}{64}$ or geometriquement parlant le quarré I de la ligne A B = 1 est la figure A B C D plus grande que la ligne c B = 1 de mesme le quarré $1 \frac{1}{4} \frac{1}{2}$ f B est la figure f i K B plus grande que la ligne f B le quarré $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{4}$ ou de la ligne g B est la figure g, m, n, B plus grande que &c donc &c

Corollaire 2ond

il suit de ce que nous avons dit qu'un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction: car une fraction: quelquonque est toujours plus petite qu'un nombre entier or une fraction racine est toujours plus grande que la puissance donc &c

Corollaire 3eme

on appelle vrays fractions seullement celles qui ne peuvent estre reduittes en entier ny $\frac{4}{3}$ n'est pas vray fraction parce qu'il est reductible a $1+\frac{1}{3}$, mais un entier est vray fraction parce qu'il est desormais irreductible

nombre 2ond

Du calcul des autres especes de fractions

1° comme on est obligé d'employer dans l'usage ordinaire diverses sortes de mesures, les parties de ces mesures sont autant d'especes de fractions qui se rencontrent souvent dans le calcul
2° Les mesures les plus en usage sont celles qui suivant le cercle se divisent en 360 parties egales, qu'on appelle degres, le degres se divise en 60 minutes

30

chaque minute en 60 secondes chaque seconde en 60 tierces de sorte qu'un degré 10 degrés sont $\frac{1}{360}$ $\frac{10}{360}$ d'un cercle

Le temps se divise en jours, chaques jours en 24 parties egales, appellés heures chaques heures en 60 minutes chaque minute en 60 secondes &c

Les distances se mesurent par toises: La toise contient six pieds le pied a 12 pouces, Le pouce contient 12 lignes, chaque ligne a 12 points

La monnoye se divise en livres, la livre contient 20 sols le sol contient 12 deniers

Le poid s'exprime par livres, La livre contient 16 onces, l'once 8 gros, le gros 72 grains

3° d'ou il faut conclure en general 1° que d'une mesure quelconque les parties qui ont un meme nom sont des fractions qui ont un meme denominateur 2° que ce denominateur est egal au nombre des parties egales que contient la mesure qui precede immediatement. ainsi toutes les onces sont des fractions dont le denominateur est toujours 16 tous les sols sont des fractions dont le denominateur est 20

probleme 1er.

ajouter ensemble des quantités composées c'est a dire des fractions ou parties d'une meme mesure

Solution il faut disposer ces fractions en colonnes chacune selon leur denominateur ny les deniers sous

Les deniers, les sols sous les sols, les livres sous les livres prendre la somme de chaque colonne en allant de droite a gauche diviser cette somme par le denominateur commun, lors quelle est plus grande que ce denominateur ecrire le reste de la ~~fraction~~ division sous cette colonne et garder le quotien pour l'ajouter a la colonne suivant en voicy un exemple:

325[tt]	17[s]	4[d]
15	11	6[d]
25	15	9
367[tt]	4[s]	7[d]

probleme 2ond

faire la soustraction des quantites composes cest a dire soustraire les fractions ou parties dune meme mesure les unes des autres

solution 1° il faut disposer la quantité dont on veut soustraire en colonnes comme cy dessus, et disposer de meme la quantité a soustraire dessous en que les parties de meme denomination se trouvent les unes sous les autres les deniers sous les deniers

52 Les sols sous les sols &c

2° il faut faire la soustraction de chaque colonne al'ordinaire, et ecrire le reste ou la difference sous la colomne

3° lorsqu'un terme inferieur surpasse son superieur il faut emprunter une unité de la colomne precedente pour ajouter a ce terme superieur, laquelle unité est toujours egale au denominateur de ce terme superieur, v.g. si de 8 deniers il faut retrancher 9 deniers, il faudra emprunter une unité c'est a dire un sol sur la colomme des sols, lequel etant evalué a 12 qui est le denominateur commun des deniers, doit estre ajouté a 8 deniers ce qui fait 20 dont ostant 9 il reste 11 deniers que l'on ecrit sous la colomne des deniers

4° il faut ensuitte diminuer d'une unité le terme dont on aura emprunté cette unité, ou, ce qui est la meme chose, augmenter son terme inferieur d'une unité voicy un exemple

655 ll	3 s.	4 d.
30	4	6 d.
624 ll	18 s	10 d.

probleme

faire la multiplication des quantites composes cest a dire multiplier les fractions ou parties des differentes mesures les unes par les autres

ey on demande combien doit couter un ouvrage de 9 toises 5 pieds 8 pouces a 3 tt 2 s. 4 d. la toise

solution 1o le principe d'ou depend cette operation est que le produit est toujour au multiplicande, Le multiplicateur est aussi a l'unité d'ou il suit que lorsque le multiplicateur est ou plus grand, ou plus petit que l'unite alors le produit doit estre ou plus grand ou egal, ou plus petit que le multiplicande ors cette unité doit estre bien remarqué soit dans le multiplicande soit dans le multiplicateur: dans l'exemple cy dessus l'unite a considerer est dans le multiplicande la toise et dans le multiplicateur la livre

2o il faut reduire les termes tant du multiplicande que du multiplicateur a leur plus petite

espece, cestadire il faut tout reduire en deniers, si il s'agit de sols, livres, et deniers; tout en pouces si il s'agit de toises, pied, et pouces dans l'exemple præcedent le multiplicande et le multiplicateur ainsi reduits deviennent

356 pouces

748 deniers.

3° il faut multiplier le multiplicande et le multiplicateur ainsi reduits l'une par l'autre, et l'on aura un produit dans la plus petite espece du multiplicateur c'est a dire en deniers dans l'exemple præcedent sçavoir

266288 deniers

4° il faut diviser le produit trouvé par le nombre de fois que la plus petite espece du multiplicande est contenue dans la plus grande c'est a dire 72 dans l'exemple præcedent parceque la toise contient 72 pouces et on aura le quotient 3698 et le reste 32 que l'on peut negliger parce qu'il ne vaut pas un denier ainsi la valeur

est toise 35 pieds, 8 pouces est 398 deniers.
5° comme le produit ainsi divisé est un produit exprimé en deniers, il faut le reduire en sols et puis en livres; ce qui se fait en divisant la somme des deniers par le nombre de fois que le denier est contenu dans le sol, et la somme des sols par le nombre de fois que le sol est contenu dans la livre

Demonstration- La raison de toutes ces operations est claire; il ne peut y avoir de difficulté que pour le 4eme article qui dit de diviser le produit trouvé qui exprime combien de fois la plus petite espece du multiplicande est contenue dans la plus grande: La raison de cette operation est que le produit est trop grand; car si le pouce coutoit 748 deniers, le veritable produit seroit il vray en multipliant 356 pouces par 748 deniers, sçavoir 266288: mais c'est la toise et non pas le

pouce qui est supposé conter 748 deniers; le produit est donc trop grand de tout le nombre de fois que le pouce est contenu dans la toise, c'est a dire il est 72 fois trop grand; il faut donc le diviser par 72, pour avoir le produit 3698 qui est le veritable

probleme 4eme

faire la division des quantites composees c'est a dire diviser les fractions ou par ties de differentes mesures les unes par les autres: vg 7 marcs 2 onces d'argent ayant couté 346ᵗᵗ 18ˢ 6 deni on demande a combien revient le marc.

Solution 1º Le principe de cette operation est que le quotien est toujours au dividande comme l'unité est au diviseur; d'ou il suit que lorsque le divi seur est plus grand, ou egal, ou plus petit que l'unité alors le quotien est

plus petit, ou egal, ou plus grand que
Le dividande
2° il faut reduire le diviseur a la plus
petite espece qu'il contient
3° il faut faire la division en commen
çant par les plus grandes especes du
dividande, et allant de suitte aux plus
petites
4° il faut multiplier le quotient entier
par le nombre qui marque combien
de fois la plus petite espece du diviseur
est contenue dans la plus grande
5° pour faire l'application de cette
methode a l'exemple proposé,
1° je reduis tout le diviseur 7 marcs, 2 onces
en 58 onces
2° je divise 346 ^{tt} 18 ^{s} 6 deniers par 58
en commençant par les livres et je trouve
au quotient 5 ^{tt} et le reste 56 ^{tt} que je reduis
en sols, ce qui fait 1120 sols auxquelles joutant

les 18 sols du dividande il vient 113 sols que je divise par 58; et je trouve au quantien 19 sols et il reste 36 que je reduis en deniers ce qui me produit 432 deniers auxquelles ajoutant les 6 deniers du dividande, La somme est 438 deniers que je divise encore par 58 et je trouve au quantien 7 deniers et la fraction $\frac{32}{58}$ que lon peut negliger ainsi le quantien entier est 5# 19 sols 7 deniers
3° je multiplie ce quantien entier par 8 parceque le marc contient 8 onces, Le produit est 47# 16 sols 8 deniers et c'est le prix cherché
Demonstration La raison de ces operations ne peut souffrir de difficulté que par raport a la multiplication que lon fait

du quotient par le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espece du diviseur est contenue dans la plus grande: en voicy la raison; il est clair que le quotient que l'on trouve apres avoir divisé 346 # 18 sols 6 deniers par 58, exprime la valeur d'une once, parce que le diviseur 58 marque des onces; par consequent affin d'avoir la valeur du marc il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il ya d'onces dans le marc c'est à dire par 8

Scholie

il faut remarquer.

1° que dans les operations precedentes il faut diviser le produit et multiplier le quotient, pour avoir l'un et l'autre juste; parce que autre chose est le resultat de deux mesures simples multipliees ou

divisés l'une par l'autre, autre chose est le resultat des parties de ces mesures divisées ou multipliées; vg. 1 sol multiplié par un sol ne donne au produit qu'1 sol; 1X1=1; mais 12 deniers qui valent un sol multipliés par 12 deniers donnent un produit different car 12X12=144 la raison se prend des differentes expressions que l'on donne a la meme mesure, car si au lieu d'exprimer un denier par un comme cy dessus on l'exprimoit par $\frac{1}{12}$, alors on auroit $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{144}{144}$ $=1$

2° il faut donc bien prendre garde a l'unité qui est consideré soit dans le multipliande soit dans le multiplicateur; car si les termes du multipliande et du multiplicateur sont etrangers a cette unité, il faut alors diviser

Le produit par le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espece du multiplicateur est contenue dans la plus grande, et en effet dans la multiplication de 12 deniers par 12 deniers considerant le sol comme l'unité j'auray 12 × 12 = 144 lequelle divisé par douze qui est le nombre qui marque combien de fois le denier est contenu dans le sol donnera $\frac{144}{12}$ = 12 deniers = 1 sol

Chapitre 2onze

Des proportions

1° la proportion est l'egalité de deux raisons, et comme les raisons sont de deux sortes sçavoir l'arithmetique et la geometrique Les proportions sont aussi de deux sortes sçavoir la

proportion arithmetique et la proportion geometrique

2° d'ou il suit que dans toute proportion il y a 4 termes, scavoir 2 antecedents, et deux consequents: dans une proportion Le 1er et le dernier terme s'appellent extreme les deux du milieu s'appellent moyens

Lemme 1er

puisqu'une raison arithmetique consiste dans la difference ou l'excés dont l'antecedent surpasse le consequent ou en est surpassé, il suit que dans toute raison arithmetique le consequent est egal a l'antecedent augmenté ou diminué de la difference selon que l'antecedent est plus petit ou plus grand que son consequent vg dans la raison arithmetique 8·4

Le conseqent 4 = 8 − 4; de meme dans la raison 3 · 9, le conseqent 9 = 3 + 6 pareillement si les deux termes a · b ont pour difference d dans la raison a · b on aura le conseqent b = a + d ou b = a − d, selon que a sera plus petit ou plus grand que b

Corollaire

dans toute raison arithmetique peut se representer par cette expression ou formule generale a · a ± d

Lemme 2^e

dans toute proportion arithmetique il y a meme difference entre les termes de la premiere et les termes de la seconde raison

preuve dans une proportion les deux raisons qui la composent sont egales, or la raison arithmetique consiste

dans la difference des deux termes donc il regne une meme difference dans les deux raisons et par consequent si la difference de la premiere raison est exprimé par d, celle de la 2onde raison sera aussi exprimé par d

Corollaire

Donc en supposant que a represente le 1er antecedent, c, le second, et d la difference qui regne dans les deux raisons, toute proportion arithmetique poura se representer par cette expression ou formule generale a.a±d :c.c±d

Theoreme

dans toute proportion arithmetique la somme des extremes est egale a la somme des moyens
preuve soit la proportion arithmetique

$a.b:c.e$ suivant le corollaire precedent cette proportion peut se representer par cette expression generale $a.a\pm d:c.c\pm d$, or les extremes $a+c\pm d=a\pm d+c$ qui sont les moyens.

Corollaire 1er

dans une proportion arithmetique continue, c'est a dire dans laquelle un meme terme est a la fois consequent de la 1ere et antecedent de la 2onde raison; comme dans la proportion $3.2:2.1$, ce qui s'exprime plus brievement par $\div 3.2.1$, dans une proportion dize arithmetique continue la somme des extremes est egale au double du moyen terme, v.g. dans la proportion precedente on aura $3+1=2+2$

Corollaire 2ond

dans une proportion arithmetique si l'on ignore un terme quelconque

v.g. le dernier terme, il sera aisé de le trouver: v.g. dans la proportion 4 · 6 : 4 · x, le dernier terme inconnu x est 2 car x = 4 − 2 = 2; ce qui se trouve encore en prenant la somme des moyens dont on retranche l'extreme connu.

Lemme 3eme

puisqu'une raison geometrique consiste dans le quotien de l'antecedent divisé par le consequent, il suit que dans toute raison geometrique le consequent multiplié par ce quotien devient egal a l'antecedent et qu'ainsi si ce quotien est un nombre entier, v.g. 2 multipliant l'antecedent non par ce nombre entier 2, mais par la fraction $\frac{1}{2}$ qui y repond, on aura le consequent et

si ce quantien est une fraction $\frac{1}{2}$ mul
tipliant l'antecedent non par cette
fraction mais par l'entier 2 qui y re
pond on aura le consequent 16 dans
la raison geometrique 8.2. ou $\frac{8}{2}$ qui
qui a pour quantien 4, on trouvera
le consequent $2 = 8 \times \frac{1}{4} = 2$; pare
illement dans la raison 2.8 dont
le quantien est $\frac{1}{4}$, on trouvera le
consequent $8 = 2 \times 4 = 8$; de meme
dans la raison geometrique a.b. en
supposant que le quantien soit p on
aura le consequent $b = ap$

Corollaire

dans toute raison geometrique peut
se representer par cette expression
ou formule generale a. ap

Lemme 9eme

dans toute proportion geometrique

il y a meme quautien entre les termes dela 1ere raison et les termes dela segonde

preuve parceque les deux raisons sont egales, or la raison geometrique consiste dans le quautien des deux termes, dont il regne un meme quautien dans les deux raisons et par consequent si le queutien de la premiere raison s'exprime par p, celuy dela segonde doit aussi s'exprimer par p

Corollaire

donc en supposant que a represente l'antecedent de la premiere raison, c et l'antecedent dela segonde et p le quotien des deux raisons sonte proportion geometrique peu vaut representer par cette expression:

ou formule generale $a \cdot ap :: c \cdot cp$

Theoreme 2d

dans toute proportion geometrique le produit des extremes est egal au produit des moyens

preuve soit la proportion $a \cdot b :: c d$; elle peut comme nous lavons dit se representer par cette expression $a \cdot ap :: c \cdot cp$ ors $acp = cap$,

Corollaire 1er

toutes les fois que deux produits sont egaux on peut tirer une proportion de leur racine, en prenant pour extremes de la proportion les racines d'un produit et pour moyens, les racines de l'autre produit, vg de ce que $acp = cap$, il suit que $a \cdot ap :: c \cdot cp$

7° Corollaire 2^ond^

dans une proportion il est permis de disposer les termes comme l'on veut pourvu que l'arrangement soit tel que le produit des extremes reste toujours egal au produit des moyens : ces changements que l'on peut faire vg dans la proportion a.b :: c.d sont :

1° - - - - - - a.c :: b.d

ce qui s'appelle le changement *alternando* ou l'on met les moyens a la place l'un de l'autre

2° - - - - b.a :: d.c
b.d :: a.c
c.a :: d.b
c.d :: a.b

ce changement s'appelle *invertendo*, et il consiste a mettre les moyens a la place des extremes et reciproquement

3° - - - - d.b :: c.a
d.c :: b.a

cechangement s'appelle permutando
et consiste a mettre les extremes a la place l'un
de l'autre:

4° il y a d'autres changements que l'on peut
faire soit en ajoutant les consequents aux
antecedents, comme vg a+b. b :: c+d. d,
soit en retranchant, soit en divisant, soit &c.
et qui pour cela s'appelle addendo, subs
trahendo dividendo &c

Corollaire 3eme

si deux quantites inegales sont multipliees ou
divisees par une meme quantite, les produits
ou les quotients auront entre eux la meme
raison qu'avoit leur racine ou leur dividende
vg si les racines a. ap se multiplie par une
3eme et meme quantite vg m. les produits
am. amp, seront entre eux comme les racines
a. ap ou bien l'on aura am. amp :: a. ap,
car dans cette proportion le produit des extremes
est egal au produit des moyens. d'ou il suit
que les tous sont entre eux comme leur parties
semblables, c'est a dire comme les moities, les quarts,
les tiers &c

Corollaire 4eme

1° une raison doublée de deux raisons composantes

est egale a la raison qu'ont entre eux les les quarres des termes de l'une ou l'autre composant
vg soluner deux raisons egales a. ap :: b. bp, la raison doublee de ces deux raisons est ab. abpp : ou l'on aura ab. abpp :: aa. aapp; ou bien ab. abpp :: bb. bbpp, car dans ces ~~proportions~~ le produit des extremes est egal au produit des moyens

2° leur raison triplee des 3 raisons composantes est egale a la raison qu'ont entre eux les cubes des termes de l'une des trois raisons composantes

3° par la mesme raison une raison quadruplee est egale a la raison qu'ont entre elles les ~~4emes~~ puissances

4° ce corrollaire peut s'enoncer autrement en disant que les quarrés sont en raison dou blé de leurs racine, que les cubes sont en raison triplée, les 4emes puissances en raison qua druplee de leur racines

Theoreme 3eme

si l'on multiplie ou si l'on divise les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les produits ou les quotients seront

proportionels

preuve si lon multiplie les termes de a. ap :: b. bp par les termes de c. cp :: d. dp, on aura la proportion ac. acpp :: bd. bdpp car dans cette proportion le produit des extremes est egal au produit des moyens, comme il est evident; on prouveroit la meme chose, si lon divisoit les termes d'une proportion par les termes d'une autre

Corollaire 1er.

de la il suit que lorsque les puissances sont proportionelles les racines sont aussi proportionelles et reciproquement

Corollaire 2one et general

1° dans une proportion geometrique si l'on ignore un terme quelconque, vg le dernier, il sera facile de le trouver: vg dans la proportion 4. 8 :: 6. x le dernier terme inconnu x se trouvera en prenant le produit des extremes et des moyens 48 = 4x, et divisant le produit des moyens scavoir 48 par l'extreme connu 4 l'on aura $\frac{48}{4} = 12 = x$ pareillement dans proportion a. b :: c. x, lon aura $x = \frac{bc}{a}$

2° cette methode de trouver un 4eme terme proportionelle a trois autres donnes s'appelle regle de trois ou regle d'or a cause de sa grande utilite et simplicite elle sert a resoudre une infinite

Dequestions vg. silend iroit un cheval en deux heures il fait 4 lieux, en 4 heures combien en fera il, cette question se resoud par la regle de trois car arrangeant les termes connus 2 heures 4 lieux en proportion j'auray $2 \cdot 4 :: 4 \cdot x$, donc $4 \times 4 = 2 \times x$ ou $16 = 2x$, donc $x = \frac{16}{2} = 8$ c'est a dire qu'en 4 heures il feroit 8 lieux

3° la regle de trois s'appelle quelquefois directe telle est celle qui vient d'estre donné, quelquefois elle s'appelle inverse, et c'est lorsque dans la resolution il faut aranger les termes autrement qu'ils ne le sont dans la question; car ils doivent tousjours estre arrangés de facon que le 1er soit au 2ond comme le 3eme est au 4eme

4° la regle de trois est quelquefois simple, comme cy dessus quelquefois elle est composée, et on l'appelle tantost regle de cinq lorsqu'elle donne 5 termes, tantost regle de 7 lorsqu'elle a sept termes tantost 8 quelquefois elle s'appelle regle de compagnie, de fausse position & nous en pourons parler dans la suitte

Chapitre 3eme

Des progressions

1° on appelle progression l'egalité de deux raisons, vg $2 \cdot 4 :: 1 \cdot 2$; on appelle progression une suitte de raisons egales vg $2 \cdot 4 :: 1 \cdot 2 :: 8 \cdot 16 :: 6 \cdot 12$

on appelle progression uniproportionnalité continue c'est a dire dans laquelle chaque terme est a la fois consequent de la raison precedente et antecedent de la raison suivante vy 2·4::4·8::8·16::16·32 ce qui s'ecrit plus brievement ∺ 2·4·8·16·32 on appelle progression ou serie infinie, une progression ou le nombre des termes est infini
2°. il y a 2 sortes de progressions l'arithmetique et la geometrique

Theoreme 1er

dans une progression arithmetique il regne partout une meme difference entre deux termes immediatement contigues

preuve parceque la raison qui est du 1er au 2ond est la meme que celle qui est du 2ond au 3eme, du 3eme au 4eme &c

Corollaire 1er

donc dans une progression arithmetique chaque terme est egal au terme qui le precede immediatement augmenté ou diminué de la difference qui regne dans la progression: c'est pourquoy en supposant que le 1er terme soit a et que la difference soit d, on pourra representer une progression arithmetique sous cette expression
÷ $a \cdot a+d \cdot a+2d \cdot a+3d$

Corollaire 2ond

dans une progression arithmetique la somme

des deux termes egalement eloignes de part et d'autre des extremes est egale a la somme des extremes vg dans la progression ÷ a. a + d. a + 2d. a + 3d. a + 4d. a + 5d; la somme des deux extremes a + 2d + a + 3d qui est egale a 2a + 5d egalement eloignes des extremes est egale a la somme des extremes a + a + 5d = 2a + 5d

Corollaire 3eme

dans une progression arithmetique un terme quelconque est egal a la somme faite du 1er terme et de la difference commune multiplie par le nombre des termes precedents: vg dans la progression cy dessus le 5eme terme a + 4d est evidemment egal au 1er terme a et a la difference d multiplie par 4 qui est le nombre de termes precedents

Corollaire 4eme

dans une progression arithmetique la somme de tous les termes est egale a la somme des extremes, multiplies par la moitie du nombre des termes vg dans la progression ÷ a. a + d. a + 2d. a + 3d ou il y a 4 termes la somme de tous les extremes est 4a + 6d, or prenant la somme des extremes qui est 2a + 3d, et la multipliant par 2 qui est la moitie du nombre des termes vous aurez 4a + 6d

theoreme 2ond

dans une progression geometrique il reyne un meme quautien partout entre deux termes immediatement contigus

preuve parceque chaque terme de la progression geometrique contient celuy qui le suit de la meme maniere qu'il est contenu luy meme dans le terme precedent

Corollaire 1er

donc dans une progression geometrique un terme quelquonque est egal a celuy qui le precede immediattement, multiplie par le quautien commun qui reyne dans la progression. c'est pour quoy en supposant que le 1er terme est a et que le quautien est p on pourra representer une progression geometrique sous cette expression ÷÷ $a \cdot ap : ap^2 \cdot ap^3 \cdot ap^4 \cdot ap^5 \cdot ap^6$

Corollaire 2ond

dans une progression geometrique la somme des antecedents est a la somme des consequents comme un antecedent est a un consequent.

preuve dans la progression geometrique ÷÷ $a \cdot ap : ap^2 \cdot ap^3 \cdot ap^4$ la somme des antecedents $a + ap + ap^2 + ap^3$ est a la somme des consequents $ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 :: a \cdot p$ ce qui est evident, car dans cette proportion le produit des extremes est egal a celuy des moyens

Corollaire 3eme

dans une progression geometrique chaque terme est egal au produit du 1er terme par le quotient de la progression elevé à une puissance de meme degré que le nombre des termes precedents.

preuve: cy dans la progression cy dessus le 5eme terme aq^4 est egal au produit du 1er terme a multiplie par le quotient q^4 qui est elevé a la 4eme puissance laquelle puissance est de meme degré que le nombre des termes precedents qui sont au nombre de 4

Corollaire 4eme

1º dans une progression geometrique, le 1er terme est au 3eme comme le quarré du 1er est au quarré du 2ond; de meme le 1er terme est au 4eme, comme le cube du 1er est au cube du 2ond et ainsi du reste.

2º generalement parlant 2 termes quelconques eloignés d'une intervalle quelconque sont toujours entre eux comme deux termes immediatement contigus elevés chacun a une puissance de meme degré que l'intervalle des deux 1ers termes

preuve la chose est evidente par la seule inspection de la formule, car on y verra: que le 1er terme est au 3eme comme le quarré du 1er est au quarré

Second, ou bien que a. ap^2 :: a^2. a^2p^2 car cette proportion est juste, parceque le produit des extremes y est egal au produit des moyens.

Corollaire 5eme

1° dans une progression geometrique dont les termes sont affectes d'exposants, les exposants sont en progression arithemetique cela se voit dans la formule ÷÷ a. ap^1. ap^2. ap^3. ap^4. ap^5. ap^6 &c

2° d'ou il suit que si dans une progression geometrique on prend 4 termes quelconques dont les exposants soyent en proportion ou progression arithemetique, alors les termes eux memes seront en proportion ou progression geometrique

Section 4eme

De l'equation

1° l'equation est le but du calcul, le but du geometre est d'egaler une quantite a une autre; en effet son but est de mesurer les dimensions des corps, des surfaces & ors mesurer c'est egaler une chose a une mesure connue prise un certain nombre de fois sçavoir autant de fois que cette mesure est contenue dans la chose qu'on veut mesurer

2° pour parvenir a mesurer les grandeurs, ils commencent par les calculs simples des quantites, et c'est l'arithemetique, il continue par le calcul du raport des quantites et c'est l'analogie ou la proportion et il finit par le calcul des proportions, qui

est l'æquation

3° l'æquation se forme de la pproportion car si j'ay vy a : b :: c . d en prenant le produit des extremes et des moyens, il resulte l'æquation ad = bc on peut aussi former une æquation immediatement, et sans avoir recours a une pproportion præcedente vy si je dis: pierre a 10 eus, paul a 15 eus, quelle en est la somme? il est clair que cette quæstion se peut exprimer par cette æquation 10 + 15 = 25

4° les æquations sont susceptibles de plusieurs operations dont nous parlerons dans la suitte, l'art d'operer sur les æquations s'appelle calcul analytique, qui consiste a former et a resoudre les æquations le but et la fin du calcul analytique est de connoitre les quantités inconnues qui se trouvent dans une æquation par le moyen des quantités connues vy si j'ay 12 = 3x, et qu'il faille connoitre la valeur de x inconnue il est clair qu'en divisant les deux membres de l'æquation par 3, j'aurray 4 = x, et par consequent la valeur de x devient connue

5° on distingue des æquations de differents degres sçavoir du 1er degré, du 2ond degré du troisieme, degré selon que l'inconnu

dont on cherche la valeur est elevée a la 1ere a la 2onde, a la 3eme puissance & l'analyse qui a pour objet les equations du 1er degré s'appelle analyse simple; celle qui a pour objet les equations du 2ond, du 3eme du 4eme & degré: s'appelle analyse composée: nous ne parlerons que de l'analyse simple

60 l'analyse consiste a scavoir former et decomposer. la formation des equations s'appelle sinpthese ou composition des equations la decomposition des equations s'appelle resolution ou analyse des equations

Chapitre 1er

De la sinpthese ou formation des equations

1 la sinpthese ou formation de l'equation consiste a composer et a former une equation d'une proportion donné en prenant le produit des extremes et celuy des moyens, et c'est le principe de toute l'analyse: ou bien s'il n'y a point de proportion donné de former immediatement une equation selon les conditions proposées: la 1ere methode de former une equation n'a rien de dificile; la 2onde, comme elle ne suppose pas de proportion au moins connue expressement,

mais seulement enveloppé et sous entendu, a quel que difficulté
2° c'est de cette 2onde maniere qu'on forme le plus souvent les equations dont on se sert pour resoudre les problemes, c'est a dire, pour resoudre les questions ou l'on propose a connoitre des quantites inconnues par le moyen d'autres quantites qui sont connues les quantites inconnues se representent ordinairement par les dernieres lettres de l'alphabet x, y, z, on se sert au contraire des lettres a, b, c, d, e, f, &c pour representer les quantites connues
3° pour former les equations selon la 2onde methode, c'est a dire immediatement et sans le secours de supposition donné, il faut remarquer 1° la nature et les proprietes de l'equation 2° les conditions du probleme 3° l'expression des conditions
regle 1ere
une equation est l'egalité de 2 nombres de 2 quantites ce qui est d'un coté est precisement egal a ce qui est de l'autre pour conserver cette egalité; il n'est pas besoin de laisser les choses d'un coté et de l'autre comme elles sont absolument mais relativement, c'est a dire que vous pouves y ajouter ou oter d'un coté pourvu que vous ajoutiez ou otiez precisement de l'autre vous pouves multiplier ou diviser, exalter ou extraire, d'un coté pourvu que vous fassiez la meme chose de l'autre &c

2° de ce principe il suit quelques corolaires qui peuvent encore servir de regle dans la formation des æquations Corolaire 1er.

1° ayant l'æquation $x - b = ac$, je puis ajouter $\underline{b}$ de coté et d'autre et il viendra $x - b + b = ac + b$, et en reduisant j'auray $x = ac + b$; donc dans une æquation je puis faire passer une quantité negative d'un membre a l'autre en changeant son signe de moins en plus ou de $-$ en $+$

si j'ay l'æquation $x + b = ac$, je puis retrancher $\underline{b}$ de coté et d'autre; ainsi j'auray $x + b - b = ac - b$, et en reduisant l'on aura $x = ac - b$; donc je puis faire passer une quantité positive d'un membre a l'autre en changeant son signe de $+$ en $-$

Corolaire 2ond.

1° si j'ay l'æquation $a + \frac{b}{c} = dx$, je puis multiplier les 2 membres de l'æquation par le denominateur $\underline{c}$; ainsy j'auray l'æquation $ac + \frac{bc}{c} = dcx$ et en reduisant j'auray $ac + b = dcx$ donc dans une æquation je puis faire evanouir une fraction en multipliant par le denominateur tous les autres termes de la fraction.

2° si j'ay l'æquation $ab + cc = bx$ je puis diviser les 2 membres par $\underline{b}$, et j'auray

$\frac{ab}{b} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$, laquelle æquation etant

reduite devient $a + \frac{cc}{b} = x$ donc je puis degager une grandeur d'une autre quantité qui la multiplie, en divisant par cette quantité tous les autres termes de l'equation; et c'est ainsi que les 2 grandeurs a et x ont eté degagées de la quantité b.

3° si j'ay une equation, vg $xx = ab$ je puis extraire la racine de xx, en faisant la meme extraction de l'autre costé, et ainsi j'auray l'equation $x = \sqrt{ab}$

Regle 2me

1° on appelle condition du probleme, des indices caracteristiques, et suffisamment capables de faire reconnoitre l'inconnu, ou les inconnus que l'on veut decouvrir.

2° il faut bien connoitre les conditions du probleme, qui ne sont rien autre chose que des raports des quantités inconnues avec les connues: plus on connoitra de ces conditions de ces raports, plus le probleme sera aisé a resoudre: il faut un certain nombre de ces conditions pour rendre la solution possible, vg pour trouver le centre d'un cercle, il ne suffit pas de connoitre qu'une telle ligne y passe: mais si on a 2 lignes qui y passent, le centre est alors determiné par le concours

et l'intersection des 2 lignes

3° lorsquil ly a autant de conditions que de choses inconnues le probleme s'appelle determiné; s'il y a moins de conditions que de choses inconnues, il s'appelle indeterminé; s'il y en a plus, il s'appelle plus que determiné

Regle 3eme

1° l'expression des conditions du probleme consiste a les exprimer algebriquement c'est a dire par des lettres ou en partie par des lettres, en partie par des nombres.

2° ce qui est inconnu et indeterminé s'exprime par des lettres, parce qu'on ne peut les exprimer d'une maniere vague et indeterminée ce qui est connu et determiné s'exprime par des nombres et autres expressions determinées.

3° ex 2 hommes ont depensé cent ecus, mais pierre a depensé 3 fois autant que paul: on voit aisement que cette question a 2 inconnues scavoir la somme que chacun a depensé: j'appelle ces deux inconnus x et y: et on voit aussi qu'il y a deux conditions: la 1ere que les deux sommes x et y sont 100 ecus ce qui donne la 1ere equation x+y = 100 la 2onde condition est que la somme depensé par pierre, ou la somme x est triple de l'autre y ce qui donne une 2onde equation x = 3 y

4 apres avoir observé tout ce qui vient d'estre dit cy dessus pour la formation et la symmetrie des equations, il en faut venir a leur analyse ou resolution

Chapitre 2ond

Dela resolution ou analyse des æquations.

Regle

1o la resolution ou l'analyse des æquations consiste a faire evannouir les inconnus les unes apres les autres

2° cette evanouissement des inconnus se fait en substituant la valeur de l'inconnu a la place de l'inconnu dans l'exemple cité puisque $x=3y$, je mets ~~trois~~ 3 y au lieu de x dans la 1ere æquation $x+y=100$ laquelle se change par la en $3y+y=100$ d'ou je tire en reduisant $4y=100$; divisant donc les 2 membres par 4 j'auray $y=25$ je connois donc la somme y qui est 25, et substituant cette valeur 25 a la place de y dans l'une des 2 æquations, vg dans l'æquation $x+y=100$, j'auray $x+25=100$, et retranchant 25 de part et d'autre, j'auray $x=75$ et par ce moyens voila les 2 inconnus degagés et connus

Corollaire

1o on voit par la que l'art de l'analyse consiste a reduire toutes les inconnes a une seule car cela fait, la question est aisé a resoudre en egalant cette inconnu a toutes les autres quantites connues de la meme æquation

2o si il y a 2 æquations et par consequent 2 inconnus, il faut les reduire en une seule,

par la substitution, comme nous venons de le faire dans l'exemple cy dessus.

3° Si il y a 3 equations et par consequent 3 inconnus, il faut les reduire a 2 inconnus en prenant la valeur d'une des inconnues dans l'une des trois equations, et la substituant a la place de l'inconnu dans les autres equations ce qui reduit les trois equations a deux, et les deux inconnus aussi a 2.

4° Si il y a 4 equations et quatre inconnus, on les reduit a 3 par la substitution, et ensuite il faut procede comme si l'on n'avoit que 3 equations et 3 inconnus.

5° Si il y avoit 5 equations et 5 inconnus et ainsy du reste

probleme 1er.

divisé 100 tt entre pierre et jean de facon que pierre eit le triple de jean

Solution j'appelle la portion que doit avoir jean x, donc que celle qui doit echoir a pierre etant 3 fois plus grande sera $3x$: mais les deux quantites prises ensemble font 100 tt donc on aura l'equation $x+3x=100$; donc en reduisant l'equation, j'aurey $4x=100$; et divisant par 4 $x=25$, et par consequent $3x=75$, ainsi la portion de jean sera 25 tt et celle de pierre 75 tt

probleme 2ond.

diviser 1000 entre pierre paul et jaque de maniere que la portion de pierre soit double de celle de paul, celle de paul triple de celle de jaque.

la portion de jaque soit appellé x, donc celle de paul

sera $3x$ et celle de piere sera $6x$: or selon la condition du probleme $x+3x+6x=1000$, donc en reduisant $10x=1000$, et $x=\frac{1000}{10}$ donc $x=100$ et $3x=300$ et $6x=600$

probleme 3eme

trouver le nombre des sacs que portent l'anesse et la mule, lequel nombre est tel que si l'anesse donnoit un de ses sacs a la mule ils en auroient autant l'une que l'autre et si la mule donnoit un de ses sacs a l'anesse celle cy auroit le double de sacs

Solution 1o soit x le nombre des sacs de l'anesse et y celuy de la mule: par la 1ere condition du probleme $x-1=y+1$ et par consequent $x=y+2$ par la 2eme condition du probleme $x+1$ est double de $y-1$ c'est a dire $x+1=2y-2$ maintenant substituons $y+2$ valeur de x prise dans la 1ere equation, a la place de x dans la 2onde equation et celle cy deviendra $y+2+1=2y-2$ donc $y+5=2y$, donc $5=2y-y$ donc $y=5$ donc la mule avoit 5 sacs

2o pour connoitre la valeur de y substituons 5 a la place de y dans l'une des deux equations (par ex.) dans l'equation $x=y+2$ l'on aura $x=5+2$, donc $x=7$, donc l'anesse avoit 7 sacs.

Scholie

L'on peut proposer une infinité de problemes et de questions semblables dont l'on trouve partout des exemples. La solution de tous ces problemes est fondée sur les memes principes et c'est aussi par les memes principes qu'on pratique ce que l'on appelle regle d'alliage, regle de fausse position qui ne sont que des cas particuliers du principe general

probleme 9eme

La somme de deux nombres etant connue, et leur difference etant aussi connue, trouver quels sont ces deux nombres

Solution soit les deux nombres que l'on cherche designes le plus grand par x, et le plus petit par y, Leur somme soit 40 que nous designerons par a, et leur difference soit 8 qui sera designé par d, il est evident

1° que les deux nombres pris ensemble egalent la somme donc $x+y=a$

2° qu'en retranchant le plus petit nombre y du plus grand x, on aura la difference, donc $x-y=d$;

3° Les deux equations precedentes exprimant les conditions du probleme, prenons la valeur de x dans la 1ere equation, et nous aurons $x=a-y$; substituons cette valeur a la place de y dans la 2onde equation et nous y aurons ... $a-y-y=d$

donc .... $a-2y=d$

donc .... $a-d=2y$

9°

donc . . . . $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$

et nous avons ainsi la valeur de y toute connue qu'il faut maintenant substituer a la place de y dans l'une ou l'autre equation, pour decouvrir la valeur de x

4° substituons donc cette valeur a la place de y dans l'equation $x + y = a$, et elle deviendra

. . . . $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$

donc . . . . $x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

donc . . . . $x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

donc . . . . $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

c'est a dire que la plus grande quantité est egale a la moitie de la somme plus la moitie de la difference et que la plus petite y est egale, comme on l'avu cy dessus a la moitie de la somme moins la moitie de la difference

5° enfin substituant a la place de a, et d, leur valeur, nous aurons $x = \frac{40}{2} + \frac{8}{2} = 20 + 4 = 24$; et pareillement nous aurons $y = \frac{40}{2} - \frac{8}{2} = 20 - 4 = 16$; les deux quantites x et y sont donc 24 et 16 les quels nombres satisfont au conditions du probleme

probleme 5eme

une armée ayant esté defaite le quart est resté sur le cham de bataille deux cinquieme ont eté faits prisonniers et 14 mille ont pris la fuite, on demande de combien d'hommes l'armée etoit composée

solution je nomme x le nombre inconnu que

je cherche, et je designe par a. les quatorse milles qui ont pris la fluttes ors

1° il est clair que le quart de x, plus les deux 5eme de x, plus 14 mille sont egaux a l'armée entière, donc - - - - - - - $\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+a=x$.

donc faisant evannoir la premiere fraction - - - - - - - - - - - - - - - - $x+\frac{8x}{5}+4a=4x$

donc faisant evannoir la seconde fraction - - - - - - - - - - - - $5x+8x+20a=20x$

donc en reduisant . . . . . . $13x+20a=20x$

2° pour prouver la valeur de x, je fais - - - - - - - - - - - - - - - - $20a=20x-13x$

donc - - - - - - - - - - - - - - $20a=7x$ - - -

donc - - - - - - - - - - - - - - $x=\frac{20a}{7}$

donc - - - - - - - - - - - - - - $x=\frac{280000}{7}$

donc - - - - - - - - - - - - - - $x=40000$

probleme 8eme.

un marchand a acheté 3 chevaux: le prix du 1er avec la moitie du prix des deux autres monte a 25 pistoles: le prix du second avec le tier du prix des deux autres, monte a 26 pistoles, le prix du 3eme avec la moitie du prix des deux autres, monte a 29 pistoles; on demande le prix de chaque cheval

on peut proposer ce probleme d'une façon plus generale, sçavoir on demande 3 nombres qui soyent que 1° le premier plus la moitie des deux autres soit egale a 25; 2° le second plus le tier des deux autres soit egal a 26; 3° le troisieme plus

93 La moitié des deux autres soit egale a 29
Solution soyent le prix du premier cheval re
presenté par x; celuy du 2ond par y; celuy
du 3eme par z, on
1° selon les conditions du probleme on aura les
trois equations suivantes

$$x+\frac{y}{2}\frac{z}{2}=25$$

$$y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26$$

$$z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29$$

on en faisant evannouir les fractions, on aura

$$2x+y+z=50$$

$$3y+x+z=78$$

$$2z+x+y=58$$

2° je cherche la valeur d'un inconnu vg y dans
la 1ere equation, cette valeur de y se trouve estre
$y=50-2x-z$, et je la substitue a la place de
y dans les deux autres equations qui devien
dront par la.. $150-6x-3z+x+z=78$

$$2z+x+50-2x-z=58$$

ou bien en simplifiant

$$150-5x-2z=78$$

$$z-x+50=58$$

3° les trois inconnues et les trois equations etant
ainsi reduittes a deux, je cherche encore la
valeur d'une de ces deux inconnues vg z, dans
la derniere des deux equations qui restent a

resoudre, et cette valeur se trouve estre $z = 8 - x$, je la substitue dans l'autre equation qui deviendra
$$150 - 5x - 16 - 2x = 78$$
donc en reduisant. . . . .
$$150 - 78 - 16 = 7x$$
donc . . . . . $7x = 56$ . . . .
donc - - $x = \frac{56}{7} = 8$

4° ayant la valeur de x toute connue qui est 8. je la substitue a la place de x dans quelqu'unes des equations precedentes v.g dans l'equation $z - x + 50 = 58$ qui deviendra par la
$$z - 8 + 50 = 58$$
donc - . $z = 58 - 50 + 8 = 16$ - - -

5° substituant ensuite les valeurs de $x = 8$, et de $z = 16$ dans quelqu'unes des equations ou se trouvent les trois inconnus je trouveray facilement la valeur de y qui sera 18; les trois nombres cherches sont donc 8, 16, 18, qui satisfont en effet aux conditions du probleme

probleme 7eme

trois personnes ont ensemble une somme de 150 tt; le 1er a le double de la somme du 2ond, le 2ond a le triple de la somme du 3eme, on demande quelle est la somme de chacun

solution la somme du 3eme soit nommé x,

 celle du 2ond sera 3x, et celle du 1er sera 6x, par consequent on aura l'equation

$$x+3x+6x = 150^{tt}$$ ou

$$10x = 150^{tt}$$

donc

$$x = \frac{150}{10}$$

donc

$$x = 15$$

c'est a dire la somme du 3eme sera 15 tt, cela posé il est aisé de trouver les sommes des deux autres

ce probleme renferme la regle qu'on appelle de fausse position, parceque pour trouver la solution des questions qui appartiennent a cette regle, on fait une ou plusieurs fausses suppositions: by pour resou dre le probleme precedant, on peut supposer que le 3eme a 10 tt, par consequent le 2ond aura 30 tt, et le 1er 60 tt ce qui fait en tout 100 tt seulement, d'ou il suit que la supposition faite est fausse, cependant cette supposition quoique fausse peut conduire a la verité par le secours de la regle de trois, en disant, si 100 tt donnent 10 tt pour la somme du 3eme, combien donneront 150 tt; ou bien

$$100 \cdot 10 :: 150 \cdot x$$

donc

$$x = \frac{150 \times 10}{100} = \frac{1500}{100} = 15$$

probleme 8eme.

Le prix d'un bon vin, et celuy d'un vin moins bon etant donnes, determiner la quantite qu'il faut mesler de ce dernier avec l'autre

pour faire un vin dont telle mesure puisse
estre vendue au un prix moyen
Solution soit le prix du meilleur vin ... $= a$
Le prix du plus commun .... $= b$
le prix moyen .... $= c$
La mesure dont on veut faire usage ... $= 1$
La quantité du vin commun qu'il faut
mesler avec le bon .... $= x$
son prix qui est egal au nombre des mesures
multiplie par le prix que conte chaque
mesure sera par consequent ...... $= bx$
La quantité du bon vin qu'il faudra
mesler avec le commun sera ..... $= 1-x$
son prix sera par consequent ... $= a-ax$
on aura donc selon la condition du probleme
..... $a-ax+bx=c$

donc .... $a+bx=c+ax$

donc .... $a=c+ax-bx$

donc .... $a-c=ax-bx$

ors le 2ond membre .... $ax-bx=x \times a-b$

donc ------------ $\frac{a-c}{a-b} = x$

Supposons maintenant que $a=16$, $b=10$, $c=12$, l'æquation precedente deviendra

$$x = \frac{16-12}{16-10} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c'est a dire il faut mesler les deux tiers du vin commun pour que telle mesure par ex la bouteille puisse estre rendue au prix moyen et par consequent il faut prendre un tier du meilleur

ce probleme renferme ce qu'on appelle la reigle d'alliage, qui consiste a scavoir connoitre les parties qu'il faut prendre de deux quantites donnes pour faire un tout ou une mesure de certaine quantité, ou de certain prix

probleme 9eme

pierre jacque et jean ont perdu leur argent au jeu, pierre et jacque ont perdu ensemble 10lt pierre et jean 11lt, jacque et jean 9lt on demande ce que chacun a perdu en particulier

probleme dixeme et dernier.

on demande a un homme ce qu'il a d'ecus, il repond si vous ajoutes ensemble la moitie, le tier, et le quart de ce que j'en ai, donne surpassera d'un le nombre d'ecus que j'ay

fin des problemes et du 1er livre

Livre 2^ond
Theorie de la geometrie simple

la geometrie simple dans sa theorie est occupée a decouvrir les proprietes de l'etendue rectiligne, elle considere 4 choses dans l'etendue scavoir, le point la ligne, la surface, les solides

Section premiere

du point

1o on appelle point l'extremité d'une ligne; l'extremité d'une ligne est l'endroit ou la ligne est rencontré par une autre ligne; car une ligne droite de soy est infinie, elle n'est terminée bornée, et determinée dans sa longueur que par la rencontre d'une autre ligne droite; en effet tant qu'une ligne droite n'est point rencontré et coupée par une autre ligne on ne peut pas dire qu'elle soit bornée et determinée dans sa longueur, cette ligne pouvant toujour estre prolongée de plus en plus a l'infini.

2o c'est pourquoy on peut definir le point l'extremité de 2 ou plusieurs lignes: il suit de la que le point n'appartient pas a une ligne seule et prise separement, mais qu'il est commun aumoins a 2 lignes; vey le point D figure 4 table 2 et quelquefois a plusieurs lignes tel est

le point A figure 5 et 8 table 2

3° un point commun a deux lignes s'appelle angle parce que le point commun a deux lignes donne un commencement a une naissance d'ouverture ce qui s'appelle angle lequel est dit estre fini lorsque l'ouverture forme une espace finie telle est l'angle BAC figure 1ere table 2 et s'appelle infiniment petite lorsque l'ouverture n'est que naissante

4° nous traiterons dans cette ~~question~~ section de l'angle, et nous parlerons 1° de la generation et de la nature de l'angle 2° du raport et de l'equation des angles

Chapitre 1er

De la generation et de la nature de l'angle

hypothese

Concevons que la ligne droite a D mobile dans son extremité D figure 8 table 2, mais immobile dans son extremité a, tourne autour du point a comme centre et fasse une revolution entiere cela posé la ligne aD aura decrit une figure au partie de laquelle les geometres ont donné differents noms

Definition

1° toute la figure decrite par la ligne mobile

a D s'appelle un cercle la ligne courbe b c D. efgbi s'appelle la circumference du cercle: le point a autour duquel c'est fait la revolution, s'appelle le centre
2° les partie determinées quelconques d'une circumference v.g. g, h, m, cb s'appelle des arcs de cercles
3° la ligne a D qui par son mouvement a decrit le cercle, s'appelle rayon: generalement toute ligne tiré du centre a la circumference s'appelle rayon, telles sont les lignes ae, ad, ag
4° la ligne b D et toute autre semblable qui divise le cercle en 2 parties egales en passant par le centre, et est terminée de part et d'autre par la circumference s'appelle diametre.

Corollaire 1er.

il est evident
1° que la ligne a D ne peut tourner autour du centre a que son extremité D ne passe successivement par tous les points D, e, b, c, h, g, f, par consequent en supposant que la ligne a D laisse une trace par tout ou elle passera elle deviendra successivement a, c, a, b, a c, a, h, a g, a f, &c
2o que les 2 lignes v.g. a D et a c, etant reunis au meme point a s'ecartant l'une de l'autre dans touts les autres points; qu'elles ont une ouverture qu'elles ont une inclinaison
3o cette ecart, cette ouverture, cette inclinaison

s'appelle angle; vy e, a, D figure 8eme
ou B A C figure 1ere fable 2 est un angle.

Corolaire 2eme

c'est pourquoy tout angle est formé par le concours de deux lygnes qui se rencontrent ou se coupent en un mesme point; les lignes qui par leur rencontre forment un angle s'appellent coté de l'angle et les poins ou elle se rencontre s'appellent somet de l'angle

Corolaire 3eme

1° il est evident que si la ligne mobile a D tourne autour du point a passe par touts les angles possibles et les forme tous successivement dans sa revolution, vy la ligne a D passant du point D au point c forme l'angle D a c; passant du point c au point b elle forme l'angle c, a, b, et ainsi du reste

2° ces angles sont de differentes especes selon les differentes positions des lignes qui les forment

car
3° ils sont ou fini ou infiniment petits ou infiniment grands: si la ligne f a figure 8, ou plutost la ligne C D figure 6 fable 2 etant supposé mobile autour du point D, vient a estre incliné sur la ligne A D elle formera avec elle un angle fini scavoir l'angle C D A si elle vient a estre totalement couché sur la ligne A D en sorte qu'elle ne

refulte avec elle qu'une meme ligne alors elle est ditte former un angle infiniment petit. si la meme ligne C D A vient a estre totalement contré sur la ligne A D mais en sens contraire, en sorte qu'elle devienne D B, elle est dite alors former avec D A une angle infiniment grand

Corollaire 2eme

l'angle fini est de differente espece selon la differente position des lignes ou coté qui le forme car.

1o si l'une des lignes rencontre tellement l'autre, qu'elle ne panche pas plus d'un coté que d'un autre l'angle qu'elle forme alors s'appelle angle droit. tel est l'angle f, a, D figure 8eme, ou l'angle grand C D A figure 9 table 2.

2o si l'une des 2 lignes rencontre tellement l'autre qu'elle panche plus d'un coté que de l'autre, alors elle forme d'un coté un angle qui s'appelle aigu et de l'autre un angle qui s'appelle obtu v.g. l'angle C D A figure 6e est aigu, et l'angle C D B est obtu: pareillement dans la figure 8 l'angle e, a, D. est aigu, et l'angle e, a, b, est obtu

3o selon que l'inclinaison des cotés varie et devient plus ou moins grande, l'angle devient plus ou moins aigu d'un coté et plus ou moins obtu de l'autre. ~~corolair~~ Corollaire 3eme.

comme la position respective des lignes ou cotes determine l'espece de l'angle, de meme aussi

l'espece de l'angle determine la position respective des cotes car.
1° si l'angle est infiniment petit, les 2 lignes ou cotés sont totalement couchées l'un sur l'autre et cette position respective des cotés s'appelle ou superposition si ils se touchent immediatement, ou parallelisme si ils laissent entre eux un intervalle
2° si l'angle est infiniment grand, alors les 2 cotes ne font qu'une seule et même ligne continué
3° si l'angle est fini, ou il est droit ou aigu, ou obtus: dans le cas de l'angle droit aucune des lignes n'est panché sur l'autre, et alors elles sont dittes perpendiculaires l'une par raport a l'autre; si l'angle est aigu alors l'une des lignes est panché sur l'autre; si il est obtus alors l'une des lignes est pareillement panché sur l'autre mais du coté opposé

Theoreme 1er

la grandeur d'un angle ne depend pas de la longeur des cotes.
preuve que dans l'angle A C D. figure 1ere tabl. 2 on diminue les cotes C A et C D en tirant les lignes K,p, h,o, g,n, f,m, &c il est clair que l'angle ne diminuera point pour cela mais qu'il restera toujour le meme, tant que le point C subsistera

Corolaire

c'est pour cette raison que l'angle reside touta entier dans un point commun a 2 lignes: car otés ce point

il ny a plus d'angle, et mettes ce point l'angle subsistera quand meme il ny auroit point de coté fini et determiné

Theoreme 2ond.

la grandeur de l'angle depend de l'ouverture ou inclinaison des cotes

preuve plus l'inclinaison est grande, plus l'angle est petit plus l'inclinaison est petite plus l'angle est grand: lorsque l'inclinaison est la meme les angles sont egaux lorsque l'inclinaison est differente les angles sont inegaux donc &

Corolaire 1er

c'est pour cela qu'un angle infiniment petit est seulement celuy, ou les cotes ont une inclinaison infiniment grande; ce qui ne se trouve que dans le cas ou de la superposition ou du parallelisme des cotes; car un angle peut estre fini quoyque ces cotes soient infiniment petits

Theoreme 3eme

l'angle contenu est plus grand que l'angle qui le contient lorsque leurs extremites sont appuyes sur une baze commune.

preuve dans la figure 16eme sablez l'angle D F E est plus grand que D C E et ainsi du reste parceque plus les somets A, B, C & s'eloignent de la baze D E plus les cotes des angles sont inclines l'un sur l'autre: or dans le cas present le somet de l'angle qui contient est plus eloigne de la baze

commune que le sommet ~~autre~~ de l'angle contenu, donc le theoreme 8eme

l'angle contenu est plus petit que celuy qui contient lorsqu'ils ont un sommet commun

preuve parceque si le sommet est commun comme dans la figure 8eme table 2 il est evident que les cotes de l'angle contenu D A E sont plus inclines que les cotes de l'angle G A B

premierement

1o lorsqu'une ligne tombe sur une autre soit perpendiculairement soit obliquement elle forme toujours avec elle deux angles qui pris ensemble valent 2 angles droits figure 4eme table 2. c'est la meme chose si plusieurs lignes tombent sur une autre, et la rencontrent dans un meme point

2o Lorsque 2 lignes se coupent en un point, elle forme autour de ce point 4 angles vg dans la figure 7 table 2 les lignes A C E, B C D forment autour du point C 4 angles sçavoir l'angle A C D, l'angle &

3o dans le cas precedent lorsque les lignes sont perpendiculaires l'une a l'autre, les 4 angles sont droits, comme il paroit figure 4eme table 2 onde

4o dans le cas precedent lorsque les lignes ~~sont~~ sont inclines l'une sur l'autre, les quatres angles formés autour

du point d'intersection, il y en a 2 d'aigus formes du coté de l'inclinaison et 2 d'obtus formes du coté de l'eloignement des cotes.

5° dans le cas precedent les angles opposés au somet sont egaux, parcequ'ils sont formés par une meme inclinaison, car consevant la ligne g A C figure 7 table 2 mobile autour du point C, il est clair qu'elle ne peut s'incliner d'un coté sur B C qu'elle ne s'incline a proportion de l'autre coté sur C D.

6° dans le cas precedent, si au lieu de 2 lignes on concoit que plusieurs lignes se coupent en point commun, tous les angles formés autour de ce point pris ensemble equivalent 4 angles droits: car si l'on concoit que tous ces angles soyent formés par la revolution de la ligne f a, figure 8eme table 2 autour du point a, il est clair que la ligne mobile f a, dans sa revolution aura formé 4 angles droits, dans lesquels se trouvent renfermes et compris tous les angles aigus formés autour du meme point a.

Theoreme 4eme

La grandeur de l'angle se mesure par l'arc du cercle qui peut estre compris entre les cotes de l'angle

preuve: l'angle se forme comme nous l'avons dit par l'ouverture de 2 lignes, laquelle ne peut se mesurer plus naturellement que par l'arc que decrit l'extremité d'une des lignes lorsqu'elle s'ecarte de l'autre:

il est clair que si la ligne d, a, figure semblable fait une revolution autour du point a pour former tous les angles possibles, il est clair, dis-je, que tous ces angles sont renfermés sous la circumference entiere décrite par l'extremité d, et que chaque angle est renfermé sous une portion de cette circumference:

Corollaire:

1o c'est pour cela que les geometres ont divisés la circumference du cercle en un certain nombre de parties egales, qu'on appelle degrés, sçavoir en 360 degrés: chaque degré est encore divisé en 60 partie egales qu'on appelle minutes; chaque minute est divisé en secondes, 60 secondes.
2o l'angles droit est mesuré par le quart de la circumference et ainsi sa valeur est de 90 degrés.
3o l'angle obtu est mesuré par un arc de circumference plus grand que le quart et ainsi sa valeur passe 90 degrés
4o l'angle aigu est mesuré par un arc moindre que le quart, et ainsi sa valeur est moindre que 90 degrés
5o on appelle complement de l'angle sa difference avec l'angle droit, on appelle supplement de l'angle

la difference avec 2 angles droits: c'est pourquoy un angle aigu et un angle obtu formé par le concours de 2 lignes ont un meme complement

Theoreme 6eme

La circumference du cercle n'est pas la mesure absolue de l'angle.

preuve une quantité ne peut se mesurer que par une quantité de meme espece, une surface se doit mesurer par une surface moindre une ligne par une ligne, un angle par un angle or l'angle et la circumference du cercle sont des quantités de differentes especes, donc &c.

Theoreme 7eme

la circumference du cercle est la mesure relatif de l'angle.

preuve parceque l'angle etant l'ouverture de 2 lignes, cette ouverture doit naturellement se mesurer dans les differents angles par l'arc du cercle decrit du somet avec la meme ouverture du compas, comme centre et inclepté entre les cotes; car un angle double intercepteroa un arc double un angle egal interceptera un arc egal ainsi du reste

Corolaire

l'angle ne se mesure pas par la longueur de l'arc mais par le nombre de degrés qu'il contient ainsi deux angles sont egaux quoyque qu'ils interceptent des arcs de differente grandeur pourvue que ces arcs soient semblables,

cestadire d'un meme nombre de degres; vg l'angle b, a, c, figure 9eme table, ere est egal a l'angle d, a, e, quoiqu'ils intercedent des arcs b, c, de differentes longeurs parceque ces arcs ont un meme nombre de degres: la raison en est qu'une petite circumference contient autant de degres qu'une grande circumference quoique ces degres soient plus petits.

Chapitre 2ond.
du rapport et de l'equation des angles
Definition

on appelle figure, 1o toute etendue toute etendue qui est bornee et limite dans toute figure il y a 2 choses a considerer les angles et les cotes.

2o

une figure recoit differents noms selon le nombre de ses cotes et la qualite de ses angles consideres selon les cotes, elle s'appelle triangle si elle 3 cotes: quadrilataire si elle a 4 cotes pentagone si elle en a 5 exagone, si elle a 6 en general toute figure qui a plus de 3 cotes, s'appelle poligone: si ~~elle~~ elle a un nombre infini de cotes, elle s'appelle poligone infinite ou cercle

3o

si le triangle a tous ses cotes egaux, il s'appelle aequilater, si il a 2 cotes seulement egaux

il s'appelle isocel; si il a 3 cotes inegaux il s'appelle scalene 4°
si le quadrilataire a ses cotes opposes paralleles, il s'appelle parallelograme, figure 10 table 2 si il n'y a que 2 cotes paralleles il s'appelle trapeze figure 17 table 2 5°
si le parallelograme a tous ses angles droits il s'appelle rectangle figure 11eme si il n'a pas ses angles egaux, mais qu'il ait tous ces cotes egaux il s'appelle rhonde ou lozange figure 18; si il a les cotes inegaux de meme que les angles il s'appelle rhomboide figure 19

6°

le pentagone, l'exagone & en general tout polygone s'appelle regulier lorsqu'il a tous les angles egaux et tous ces cotes egaux; et il s'appelle irregulier lorsqu'il n'a pas ou tous les angles ou tous ces cotes egaux

principe

1°

Lorsqu'une ligne coupe 2 paralleles, si elle est inclinée sur l'une des paralleles, elle est aussi egalement incliné sur l'autre figure 9 table 2
preuve 2 lignes paralleles ont entre elles la meme position, donc elles ont une meme position relativement a une troisieme ligne, car cette 3eme ligne conserve la meme direction dans tous les points

2°

une ligne qui est paralelle ou perpendiculaire par raport à l'une de deux lignes paralelles est aussi paralelle ou perpendiculaire par raport a l'autre paralelle, ce qui est evident

3°

la ligne la plus courte que l'on puisse tirer entre 2 paralelles est la ligne perpendiculaire

4°

deux lignes inclinés entre 2 paralelles et egalement eloignes de la perpendiculaire, sont egales entre elles figure 2 table 2. pareillement 2 lignes inclinées entre paralelle et egales entre elles sont egalement eloignés de la perpendiculaire: pareillement 2 lignes egalement eloignés de la perpendiculaire et egales entre elles, sont egalement inclinées entre les 2 paralelles, parceque dans tout leur point correspondant elles s'eloigne egalement de la perpendiculaire

L'emme 1er.

Lorsqu'une ligne coupe 2 paralelles figure 1 table 2 1° les angles correspondants sont egaux, 2° les angles alternes ou internes sont egaux 3° les angles alternes et externes sont egaux 4° les angles adjacants pris 2 a 2 sont egaux, 4° les angles du meme coté de la secande sont egaux a 2 droits.

preuve 1° les angles correspondants sont ceux qui sont formes du meme coté de la secande

~~paralleles~~ tels sont les angles f, b; b, d; a, a; &c,
ors ces angles sont egaux l'un a l'autre, puisqu'ils
sont formes par l'inclinaison d'une meme ligne
sur les 2 paralelles.
preuve 2° les angles alternes et internes sont ceux
qui sont de differents cotes de la secande entre les
paralelles, tels sont les angles f, c, e, d; ors ces
angles vg. c, f sont egaux parcequ'ils sont tous
deux egaux a un 3eme b, car l'angle c, = b,
parcequ'ils sont opposes au somet, et l'angle f = b
parcequ'ils sont correspondants donc &c.
preuve 3° les angles alternes externes sont en dehors
des paralelles, tels sont h, a, ors on prouve de la
meme facon qu'ils sont egaux entre eux, parcequ'
ils sont egaux au 3eme angle
preuve 4° les angles adjacents du meme coté de la
secande sont vg. f, d, ors ces 2 angles prises ensemble
valent 2 droits car les 2 angles f, h valent
2 angles droits ors h = d parcequ'ils sont
correspondants, donc f avec d vaut 2 angles
droits

Lemme 2eme.

la proposition inverse du lemme precedent
est aussi vray, c'est a dire lorsque 1° les angles
correspondants sont egaux, 2° lorsque les angles
alternes internes sont egaux
3° lorsque les angles alternes externes sont egaux
alors les 2 lignes qui sont coupes par la secande
sont paralelles.
preuve dans chacun de ces 3 cas il arrive que les

angles correspondants sont egaux, et par consequent la seconde est egalement inclinée sur les 2 lignes coupées. or elle ne peut estre egalement inclinée que les 2 lignes coupées ne soyent paralelles, donc &c

proposition

des definitions, principes, et lemmes etablies cy dessus nous allons deduire et conclure ce qui regarde le raport et l'æquation des angles: et nous parlerons 1° de l'æquation des angles considerée dans une meme figure 2° de l'æquation des angles considerée dans differentes figures.

article 1er.
De l'æquation des angles dans une meme figure.

toutes les figures peuvent se raporter en general a ces 3, le triangle, le poligone, le cercle; c'est pourquoy nous parlerons 1° de l'æquation des angles dans le triangle 2° de l'æquation des angles dans le poligone. 3° de l'æquation des angles dans le cercle.

paragraphe 1er
de l'æquation des angles du 3 angle

theoreme 1er

Les 3 angles d'un triangle prises ensemble sont egaux a 2 droits

preuve ayant fait passer la ligne d c par les somet du triangle c, d, a, figure 11eme table 4eme il est clair que l'angle f, avec b, c, vaut aussi 2 angles droits puisque b = c par ce qu'ils sont alternes internes, et pareillement g = b par la meme raison

Corollaire 1er

La somme des angles d'un triangle est egale a la somme des angles d'un autre triangle

Corollaire 2ond

connoissant deux angles dans un triangle, c'est facile de connoitre le 3eme parce qu'il est toujours le supplement des 2 autres

Corollaire 3eme

un triangle ne peut avoir 2 angles droits encore moins deux angles obtus

Theoreme 2ond

dans un triangle l'angle exterieur, scavoir l'angle a figure 12eme tab 2 est egale aux 2 angles interieurs opposes

preuve Les deux angles interieures avec l'angle b, valent 2 angles droits l'angle exterieure avec b, vaut aussi 2 angles droits, donc le meme angle b vaut aussi 2 angles droits, donc l'angle exterieure et les 2 interieurs ayant un meme rapport avec un 3eme angle, sont egaux entre eux

Theoreme 3eme

Le triangle isoselle a les 2 angles sur la base egaux entre eux figu. 13 tab. 2

preuve le triangle isoselle est formé de deux lignes egales tirés d'un meme point sur une 3eme ligne

ors trpar le sommet du triangle on tire une ligne paralelle a la base, alors les deux costes du triangle estant mesmes entre paralelles, et egaux entre eux sont par consequent egalement mesmes sur la base et forment avec elle des angles egaux

Corollaire 1er

donc dans le triangle equilataire, tous les angles sont egaux, puisque chaque costé du triangle equilataire peut successivement estre regardé comme la base d'un triangle isocelle sur lequel les angles formés sont egaux

Corollaire 2one

donc dans le triangle scalene, tous les angles sont inegaux

paragraphe 2one

De l'æquation des angles du poligone

Theoreme 1er

tout quadrilataire contient 4 angles dont la somme vaut 4 angles droits fig 17 [illegible] 18 19 20 tab 2

preuve si d'un angle du quadrilataire on tire une ligne (qui s'appelle diagonale)

al'angle opposé, cette diagonale divisera le quadrilatataire en deux triangles, dont chacun vaut 2 angles droits donc &

Theoreme 2eme

Tout pentagone contient 5 angles dont la somme vaut 6 angles droits fig 21 tab 2

preuve si d'un angle du pentagone on tire des lignes a tous les autres angles, le pentagone sera divisé en trois tri angles dont chacun vaut deux angles droits et dont la somme vaut par consequent 6 angles droits

Corollaire

Lorsque le pentagone est regulier c'est a dire qu'il a tous les angles egaux, chaque angle est de 108 degrés, parceque tous ensemble ils valent 540 degrés dont chacun en particulier en vaut la 5eme partie sçavoir 108 degrés

Theoreme 3eme

Tout exagone contient 6 angles dont la somme vaut 8 angles droits figu 22 ta 2

preuve parceque les diagonales tirés d'un angle de l'exagone a tous les autres angles divisent l'exagone en 4 triangles dont chacun vaut 2 angles droits

Corollaire 1er

Lorsque l'exagone est regulier, chacun de ses angles est de 120 degrés

Corollaire 2me

en general les angles d'un poligone quelconque pris ensemble valent autant de fois 2 angles droits, qu'on peut former de triangles par les diagonales tirés d'un angle a tous les autres. preuve la chose est claire par ce qui a eté dit cy dessus.

Corollaire 3eme

donc tous les angles a la circonference du poligone valent autant de fois 2 angles droits, qu'il y a de costés dans le poligone moins 2 car par le moyens des diagonales on peut former dans le poligone autant de triangles, qu'il y a de costés dans le poligone − 2, on en peut former 2 dans le quadrilatere, 3 dans le pentagone, 4 dans l'exagone &

Corollaire 4eme

Lorsque le poligone est regulier, il est facile de connoitre la valeur de chaque angle; en divisant la somme des angles, par le nombre des costés, ou bien par le nombre des angles

Theoreme 7eme

tous les angles exterieurs a la circonference du poligone c'est a dire ceux qui sont formes par le coté et le prolongement du coté adjacent, pris

ensemble vallent 4 angles droits fig. 23 tab 2
preuve chaque angle exterieur avec l'angle
interieur adjaceant vaut 2 angles droits
comme il est evident; donc touts les angles
du poligone soit interieurs soit exterieurs
pris ensemble valent autant de fois deux
angles droits qu'il y a de costes dans le poligone,
or les angles interieurs, valent autant de fois
deux angles droits qu'il y a de costes moins
deux ou moins 4 angles droits; donc la va
leur des angles exteriuers est de 4 angles
droits

theoreme 5eme

Si l'on divise le poligone en triangle, non par
des diagonales comme cy dessus mais par des
rayons tires du centre a chacun des angles
fig. 23 tab. 2 la somme des angles exterieurs
sera egale a la somme des angles formes
autour du centre
preuve car chacune de ces deux sommes vaut
4 angles droits

theoreme 6eme

dans tout poligone regulier chaque angle
au centre est supplement de l'angle a la
circumference

preuve l'angle au centre est le supplement de la 2 angles qui sont sur la base de chaque triangle or les 2 angles de la base du triangle sont egaux a l'angle de la circumference, parceque dans le polygone regulier chaque rayon divise l'angle a la circumference en deux parties egales, donc

Corolleur

l'angle au centre est egal a l'angle exterieur, car l'un ou l'autre est supplement par raport a un 3eme angle, savoir l'angle a la circumference

paragraphe 3eme

De l'equation des angles du cercle

1° l'angle considéré par raport au cercle prend differents noms, selon la differente position des lignes qui le forment.

si l'angle est formé par deux rayons il s'appelle angle au centre v.g. C A B fig 8 tab 3

si il est formé par deux cordes qui s'entrecoupent dans un point different du centre, il s'appelle excentrique tel est l'angle Z A B fig 9

si il est formé par deux cordes tirées du meme point de la circumference il s'appelle angle inscrit v.g.

CBD fig. 8 tab. 3
si il a son sommet hors de la circonference il s'appelle angle circumscrit voy D a fig tab 3
si il est formé par une corde et une tangeante il s'appelle angle du segment voy CAB fig 3 ta 3
si il est formé par la tangeante et la circonference du cercle, il s'appelle angle de contacte, tel est l'angle A fig 4
2° nous parlerons 1° de l'angle de contacte, 2° des angles inscrits, circumscrits, excentriques au cercle.

nombre 1er

Des angles de Contacte

theoreme 1er

l'angle de contacte, c'est a dire l'angle formé par le cercle, et la tangeante, est infiniment petit

preuve parce que le cercle est une courbe qui a chaque instant ne se detourne qu'infiniment peu de la ligne droite, et par consequent de la tangeante, donc elle ne forme avec la tangeante qu'un angle infiniment petit,

theoreme 2ond

cette angle ne peut estre divisé par aucune ligne droite ou ce qui est la meme chose, on ne peut faire passer par le point de contacte aucune ligne droite entre la tangeante et le cercle.

preuve parceque toute ligne droite vy AB fig. 15 tab 3 tirée du point de contacte coupera la courbe; car la courbe ne s'eloigne de la tangeante AF a chaque instant que d'une quantité infiniment petite au lieu que la ligne droite AB s'eloigne de cette mesme tangeante a chaque instant d'une quantité finie, donc la droite s'eloigne plus de la tangeante que la courbe, et par consequent coupera la courbe

theoreme 3eme

l'angle de contacte peut estre divisé a l'infini par des lignes courbes, ou ce qui est la mesme chose, on peut faire passer par le point de contacte une infinité de courbes entre la tangeante et le cercle

preuve parceque la mesme tangeante peut estre commune a plusieurs courbes, car la courbe n'est qu'un polygone d'une infinité de costes or le mesme costé etant prolongé peut estre commun a plusieurs polygones comme il paroist figure 16 tab 3.

Corollaire

d'ouilsuit que les memes points de contacte peuvent estre communs aplusieurs courbes; avec cette difference seulement que le contacte sera un plus grand point, lorsque la courbe sera plus grande, et un plus petit point lorsque la courbe sera plus petite; de meme que lorsque plusieurs polygones ont une meme tangeante fig 16e cette tangeante touche au plus grand costé du plus grand polygone et au plus petit costé du plus petit polygone.

Theoreme 7eme

La tangeante ne touche le cercle qu'en un seul point

preuve soit la tangeante A F fig 15 tab 3 et la secante A B qui coupe la circumference aux deux points A C si lon fait mouvoir la secante A B et luy fait pencher sur la tangeante, plus cette secante A B s'approchera de la tangeante A F plus les deux points

points d'intersection A C s'approcheront l'un de l'autre, donc la secante se couchera tout à fait sur la tangente A F les 2 points A C se reuniront tout à fait et ne feront plus qu'un seul et meme point donc &c

Theoreme 3eme

L'angle que forme le rayon tiré au point de contact, soit avec la circumference, soit avec la tangente du cercle est egal de part et d'autre fig 15 tab 3

preuve La circumference du cercle est une courbe uniforme qui de costé et d'autre s'eloigne egalement de la tangente, et se flechit egalement sur le rayon, donc l'angle formé par le rayon sur la circumference et sur la tangente est egale de part et d'autre

Corollaire 1er

Donc l'angle formé par le rayon soit avec la circumference soit avec la tangente, est droite

Corollaire 2ond

donc le rayon est perpendiculaire sur la tangente

L'angle qui forme le rayon avec la circum
ference du cercle est egal a l'angle qui forme
le meme rayon avec la tangeante du cercle
preuve la difference de ces deux angles n'est
que l'angle infiniment petit que forme la
circumference du cercle avec la tangeante,
ors ~~deux quantites~~ quantites qui n'ont qu'une difference
infiniment petite sont egales donc &c

Corollaire

donc les angles curvilignes, c'est a dire formes
par des courbes, ne sont pas distingues des
angles rectilignes formes par leurs tangeantes;
en effet l'angle ne consiste que dans la po
sition respective des lignes, or la position
respective des lignes est determinée par
leur tangeante qui ne sont que des prolon
gements des cotes infiniment petits des courbes

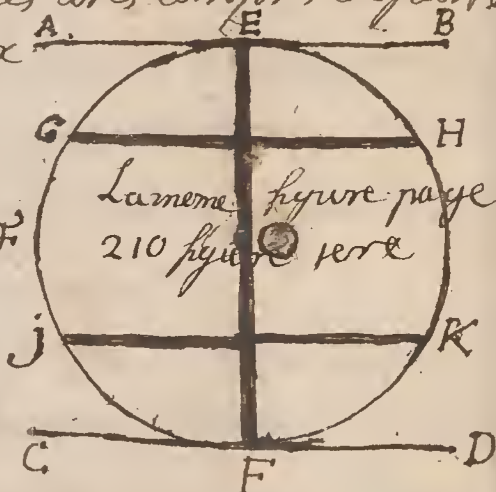
Des angles inscrits circumscrits & vouldre zone
au cercle

nombre 2ond

Des angles circonscrits inscrits &c au cercle

Lemme

Lorsque deux paralleles coupent ou touchent une circonference les arcs compris de part et d'autre sont egaux



preuve 1° si deux parallelles vg AB, CF touchent la circonference, les deux arcs interceptes EGJF, EHKF seront egaux car tirant du point de contingence une ligne EF perpendiculaire a la tanjeante AEB cette ligne sera aussi perpendiculaire a l'autre tanjeante parallelle, donc cette ligne sera un diametre, donc elle partagera la circonference entiere en deux arcs egaux de part et d'autre

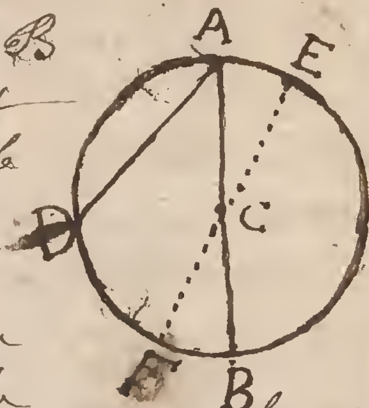
2° si deux paralleles l'une touche la circum
ference et l'autre la coupe, comme A E B, J K, les
arcs intercepter seront encore egaux car la ligne
A E B demeurant la meme concevons que la
parallelle C F D monte et s'eleve parallelle
ment a elle meme jusqu'a ce qu'elle devienne J K
il est clair que cette ligne en s'elevant passera
de part de d'autre par un nombre egal au point
de la circumference, et par consequent qu'elle
lassera de part et d'autre en dessous des arcs
egaux, donc les arcs E G J, E H K pris en
dessous seront egaux

3° si les deux paralleles coupent la circumferen
ce, elles intercepteront encore &c car la ligne J K
restant la meme concevons que la tangente
A E B s'abaisse et descende parallellement a elle
meme jusqu'a ce qu'elle devienne G on prou
vera comme cy dessus que &c

Theoreme 10e

l'angle inscrit dont le sommet est a la circum
ference, a pour mesure la moitie de l'arc
compris entre les costes

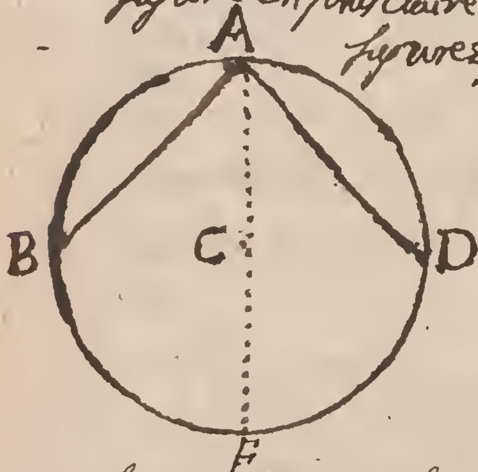
preuve supposons que l'un des costes de l'angle D A B passe par le centre C, alors ayant trêle la ligne ponctuée E F parallelle a l'autre costé D A on aura l'angle D A B = F C B, parce qu'ils sont alternes joindants, or l'angle F C B a pour mesure l'arc F B = A E = E F, donc l'arc F B qui est la mesure de l'angle A est la moitie de l'arc D B.

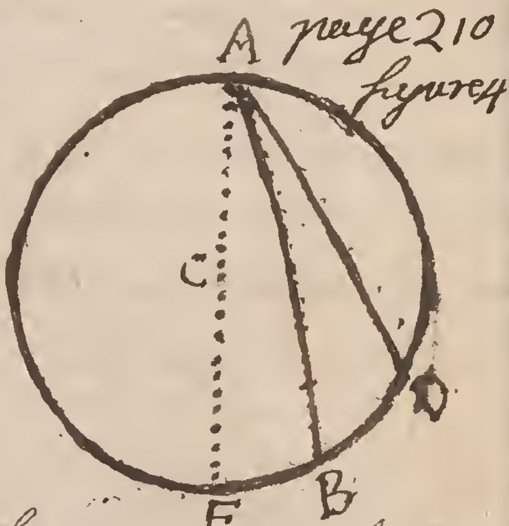


page 210 figure 2onde
La meme figure se trouve plus claire.

page 270 la meme figure est plus claire

Corollaire ver.





si l'un des costes de l'angle ne passoit pas par le centre mais que le centre fut ou entre les deux costes, ou hors.

des deux costes de l'angle comme dans les deux figures precedentes on prouveroit la meme chose comme cy dessus: en general un angle inscrit formé par deux cordes quelconques a pour mesure la moitie d'un arc sur lequel il est appuyé; en menant du sommet de l'angle la ligne AF par le centre C, on voit qu'il est aisé de prouver la meme chose que cy dessus

Corollaire 2eme

l'angle inscrit est tous double de l'angle au centre appuyé sur le meme arc, car l'angle au centre a pour mesure l'arc entier BD sur le quel il est appuyé; au lieu que l'angle inscrit n'a pour mesure que la moitie du meme arc appuyé

Corollaire 3eme

donc l'angle A sur le diametre CB fig 1 en tab 3 est droit, puisqu'il a pour mesure la moitie de la demie circonference sur laquelle il est appuyé

Corollaire 4eme

donc tous les angles AB, CD figure 2onde tab 3 appuyés sur le meme diametre, sont tous egaux, puisqu'ils sont tous droits.

l'angle A au segment, cest a dire formé par une corde et une tangeante fig 2 tab 2 a pour mesure la moitie de l'arc contenu par la corde

preuve puisque la longueur des costes ne fait rien pour la grandeur de l'angle, prenons la tangeante au point du contact, ou elle n'est encore qu'infiniment petite; cette tangeante infiniment petite peut estre regardée comme une corde infiniment petite, car prenant dans le cercle un arc infiniment petit la corde et la tangeante sont une meme ligne; car tout angle formé par deux cordes quelconques a pour mesure la moitie de l'arc compris entre ces deux cordes; donc l'angle au segment a pour mesure la moitie de l'arc compris entre la corde AC et la corde infiniment petite cest a dire le point de contact; ou ce qui est le meme, il a pour mesure la moitie de l'arc contenu par la corde

Corolaire

donc l'angle formé par un diametre et une tangeante l'est droite

Theoreme 3eme

on trouvera la mesure de l'angle circumscrit formé par 2 secantes en tirant la ligne B C fig. 9 table 3 paralelle a l'un des cotes de l'angle
preuve cette ligne tiré formera avec l'autre coté de l'angle circumscrit, un angle inscrit qui sera precisement egal a l'angle circumscrit parcequ'il luy est correspondant, or on connoit cy dessus la mesure de cet angle inscrit, donc &

Theoreme 4eme

on trouvera la mesure de l'angle circumscrit formé par 2 tangeants, en tirant la ligne D E figure 9 table 3 paralelle a l'une des tangeantes
preuve car cette ligne tirée formera avec l'autre tangeante une angle de segment qui sera precisement egal a l'angle circumscrit parcequ'il luy est correspondant. or cy dessus l'on connoit la mesure de cet angle de segment donc &

Theoreme 5eme

on trouvera pareillement la mesure de l'angle excentrique, ou de l'angle dont le sommet est en dedans du cercle, en tirant la ligne B F fig. 9 tab. 3
preuve car cette ligne tirée formera un

angle inscrit auquel est egal l'angle excentrique parceque il luy est correspondant ors cinquiement la valeur de cet angle inscrit donc

article 2 eme
De l'equation des angles dans differentes figures
Theoreme 1 er.

si dans un triangle on tire une ligne parallelle a la baze du triangle on aura 2 triangles l'un plus grand et l'autre plus petit figure 10 table 3 dont tous les angles respectifs sont egaux

preuve l'angle au sommet A est commun a l'un et a l'autre triangle d'allieurs les angles sur la baze de l'un seront egaux aux angles sur la baze de l'autre, parcequ'ils sont corr espondants

Theoreme 2 eme

reciproquement, si 2 triangles l'un plus grand et l'autre plus petit sont equiangles en touchant les cotes de l'un sur les cotes de l'autre les bases sont paralelles

preuve parceque les angles sur la base sont formes d'un meme coté de la secande, et par con sequent si ils sont egaux, il faut que les lignes sur les quelles ils sont formes par la secante soyent paralelles

Theoreme 3 eme.

2 triangles contenus l'un dans l'autre de

facon que les cotes de l'un soyent paralelles aux cotes de l'autre figure 11eme sont des lors aequiangles preuve parceque si l'on pose le somet de l'un sur le somet de l'autre alors les cotes du petit triangle seront couchees sur les cotes du plus grand et la base de l'un sera paralelle a la base de l'autre

Theoreme 9eme

2 quadrilateres contenus l'un dans l'autre de facon que les cotes de l'un soyent paralelles aux cotes de l'autre, figure 12eme sont des lors aequiangles

preuve parceque dans l'un et l'autre quadrilatere l'inclinaison des cotes l'un sur l'autre est la meme a cause de leur paralelisme et par consequent les angles formes par l'inclinaison des cotes est la meme de part et autre

Corolaire 1er

2 pentagones 2 exagones 2 eptagones en general 2 poligones quelconques contenus l'un dans l'autre, de facon que les cotes de l'un soyent paralelles aux cotes de l'autre, sont des lors par la meme raison aequi angles.

Corolaire 2ond.

donc tous les cercles sont aequi angles, car les cercles sont des poligones infinites qui etant contenus l'un dans l'autre ont tous leurs cotes paralelles

Theoreme 10eme

l'egalite des angles dans 2 ou plusieurs figures.

de meme nom est un des principes de leur simi
litude

preuve. on appelle en general figure semblable,
des figures de meme espece; et plus strictement
on appelle figures semblables celles qui ont tous
leurs angles correspondants ou respectives egaux
et leur cotes omologues proportionels: ainsi pour
la similitude des figures, il faut 2 choses, l'egua
lité des angles dont nous venons de parler et la
proportionalité des cotes dont nous allons brentost
parler.

Chapitre 3eme
Des lignes

Les lignes peuvent estre considerés ou par ra
port aux angles, ou par raport a elles memes

Article 1er
Des lignes par raport aux angles

Theoreme 1er

plus la base sur laquelle sont appuyes les
cotes de l'angle est grande plus l'angle est
grand; plus elle est petite, plus il est petit,
les cotes demeurant toujours les memes

preuve les cotes demeurant toujours les memes
il est clair qu'ils s'ecartent plus lorsque
la base est plus grande, et qu'ils s'ecartent
moins lorsqu'elle est plus petite et par conse
quent

Theoreme 2eme

plus la base d'un angle s'approche ou s'eloigne du somet plus l'angle est grand ou petit.

preuve parceque la base ne peut s'approcher ou s'eloigner du somet, sans que les cotes de l'angle s'eloygnent ou s'approchent l'un de l'autre et par consequent que l'angle augmente ou diminu

Corolaire

donc dans un triangle le plus grand coté est opposé au plus grand angle le plus petit coté au plus petit angle et reciproquement

Theoreme 3eme

cette raison de la base a l'angle opposé n'est point exact et geometrique

preuve parceque les bases ne sont point proportionelles aux angles, un angle double ne repond point a une base double ny un angle sous double a une base sous double: car si l'on inscrit un triangle dans un cercle figure 14 tab 3, les bases ou plustost les cotés opposés aux angles seront les cordes des arcs qui mesurent les angles or un angle double aura pour mesure et cependant l'arcle double ne sera pas soutenu par une corde double car si cela estoit, la corde AB de l'arc double ACB seroit double de la corde CB et par consequent egale aux cordes AC+CB ce qui est faux donc &

Theoreme 4eme

plus les angles sont petits plus la raison des bases approche de celle des angles

preuve car plus langle est petit plus est petit aussi larc qui le mesure, plus est il petit aussi la corde qui soutient cette arc, laquelle est le coté opposé a langle, or plus les arcs sont petits moins ils different de leur corde, en sorte que si larc etoit infiniment petit il ne differeroit nullement de sa corde voies

article 2 ond
Des lignes par raport a elles memes

il sagit icy de faire la comparaison des lignes pour en trouver legalité, la plus grande ou la moindre grandeur or il y a deux moyens pour faire cette comparaison qui sont la position respective des lignes, et leur analogie.

paragraphe 1er
premier moyens de la comparaison des lignes.
ou leur positione

nous considererons la position des lignes 1o dans le poligone 2o dans le cercle

nombre 1er
La position des lignes dans le poligone
Theoreme 1er

dans un cercle une ligne tire d'un point de la circumference a un autre point, sera d'autant plus longue quelle approchera

plus du centre

preuve parceque'elle aprochera plus du diametre qui est la plus grande des lygnes que lon puisse tirer dans le cercle

Theoreme 1er

Les cotes opposes du paralelogrume sont egaux entre eux figure 11eme table 2

preuve parceque ce sont des lygnes paralelles entre des paralelles.

Corolaire

Dincela diagonale du quarre est plus grande que le cote car les 2 lignes scavoir la diagonale et le cote partent du meme point et sont l'un perpendiculaire l'autre oblique entre les memes paralelles donnees figure 20eme table 2

Theoreme 2ond.

dans le polygone regulier touts les cotes sont egaux

preuve pour qu'un polygone soit regulier il faut qu'outre legalite des angles les cotes opposes soyent paralelles et quils soyent interceptes entre les memes paralelles et par consequent quils soyent egaux

Theoreme 3eme

dans le polygone regulier les rayons obliques, scavoir les lygnes tires du centre au somet des angles sont egaux: pareillement les apotheumes, ou les rayons droits c'est a dire les lygnes tires perpendiculairement sur les cotes du polygone sont egales

preuve pour qu'un polygone soit regulier, il faut que son centre soit egalement eloigne et des somets

des angles, ~~et~~ des cotes donc figure 4 table 4

Theoreme 4eme

dans l'exagone regulier le coté est egal au rayons obliques figure 4 table 4

preuve parceque le triangle B A C est equilataire car tous ces angles sont egaux, etant chacun de 60 degres; la raison en est que l'angle a la circumference de l'exagone regulier est de 120 degres et qu'il est divisé par le rayon oblique en 2 angles precisement egaux car a cause de la regularité du polygone le rayon oblique B A n'est pas plus enclinée sur un coté que sur l'autre, donc il partage egalement l'angle a la circumference du polygone

Theoreme 5eme

Le coté du pentagone est plus grand que le rayon; le coté du quarré est encore plus grand par rapport au rayon, le coté du triangle est encore plus grand par rapport au rayon en general le coté d'un polygone quelqconque au dessous de l'exagone est d'autant plus grand par rapport au rayon qu'il y a moins de cotes dans le polygone figure 5 table 4

preuve parceque si l'on inscrit ces polygones dans un meme cercle moins la figure aura de cotes, plus son coté approchera du centre du cercle et sera par consequent plus grand, comme nous l'avons vu

Theoreme 6eme

le coté de l'eptagone est plus petit que le rayon le coté de l'octogone est encore plus petit par

raport aux rayon le coté ~~de lheptagone~~ de lheptagone du decagone & en general le coté du poligone quel qu'il ne soit au dessus de lhexagone est d'autant plus petit par raport aux rayons que le poligone a moins de cotes

preuve parceque si l'on inscrit les poligones a un meme cercle, il est evident que les cotes s'eloigneront d'autant plus du centre, et seront par consequent plus petit que le nombre des cotes sera plus grand

theoreme 7eme

dans les poligones finis les rayons sont plus grands que les apothemes, mais dans le poligone infinites, ou le cercle, les rayons sont egaux aux apothemes

Corolaire

dans le cercle le raport du rayon au coté est fini car plus le poligone a de cotes, plus le rayon est grand par raport au cotes donc si le poligone a une infinité de cotes son rayon sera infiniment grand par raport aux cotes.

~~nombre zone~~

position — position de lignes dans le cercle

theoreme 1er.

une ligne qui dans le cercle coupe une corde peut avoir trois conditions, 1o passé par le centre 2o coupé la corde en 2 parties egales 3o estre perpendiculaire a cette corde. ors 2 de ces conditions etant poses, la troisieme s'ensuit necessairement

preuve 1o si la ligne passe par le centre et quelle coupe la corde CD figure 1ere table 4 en

2 parties egales elle perpendiculaire a cette corde: car alors son point A qui est le centre, et le point d'intersection seront tous deux egalement eloignes des points C et D extremité de la corde, donc tous les autres points seront egalement eloignes, de ses 2 memes extremites, donc cette ligne sera perpendiculaire a la corde
2° si la ligne passe par le centre et qu'elle soit perpendiculaire a la corde elle la coupera en 2 parties egales; car puisque cette ligne passe par le centre son point A sera egalement eloigné des 2 extremites de la corde, et parce qu'elle est perpendiculaire tous les autres points seront aussi egalement eloignes de ces 2 extremites, donc son point d'intersection sera egalement distant de ses extremites, CD dont la corde CD sera coupé en 2 parties egales
3° si la ligne est perpendiculaire a la corde et qu'elle la coupe en 2 parties egales, elle passera par le centre: car cette ligne coupant la corde en 2 parties egales, son point d'intersection sera egalement distant des deux extremites de la corde; d'ailleur elle est perpendiculaire a la corde, donc etant prolongée elle passe par tous les points du meme plant egalement distants des deux extremites de la corde, or le centre est un point egalement distant des deux extremites de la corde puisque ces extremites sont des points de la circumference, donc &c

Corolaire 1er

donc un rayon qui coupe en 2 parties egales

une corde du cercle coupe aussi l'arc soustendu par cette corde et l'angle mesuré par cet arc en 2 parties egales

Corolaire 2ond

Losqu'un triangle est isosel, si du somet de l'angle comprise entre les cotes egaux, on abaisse une perpendiculaire sur la base, 1o cette base sera coupée en 2 parties egales, 2o l'angle compris entre les cotes egaux sera aussi partagé egalement. car si du somet du triangle pris comme centre on decrit une circumferente qui passe par les autres angles, alors le cas se reduit a celuy du theoreme.

Theorime 2ond.

Si d'un point pris au dessus du centre d'un cercle on tire plusieurs lignes a la circumference, la plus longue sera celle qui passera par le centre figure 6 eme fable.

preuve si la ligne A B est supposé mobile au point A et que par son extremité B elle decrive un cercle le rayon A B decrira une circumference plus grande que la circumference G, I, B, C, D, qui na pour rayon que la ligne O B plus petite que A B or les lignes A G, I, A, D etant termines a la petite circumference ne scauroit s'etendre a la grande circumference donc elles sont plus petite que A B

190

Theoreme 3eme

si d'un point pris au dessous du centre on tire des lignes a la circumference fig 7 table 4, la plus petite sera celle qui estant prolongé passeroit par le centre

preuve si la ligne A B est conceue se mouvoir autour du point A, elle decrira par son extremité B une circumference plus petite que la circumference F, E, B, C, D, parce qu'elle est decrite par le rayon A B plus petit que D B, or les lignes A F, A E, A C &c couperont cette petite circumference puisqu'elle se termine a la grande circumference F, E, B, C, D, donc elles seront plus longues.

Theoreme 4eme

si d'un point pris au dela de la circumference on tire des lignes a la circumference concave du cercle fig 7 table 3 la plus longue sera celle qui passera par le centre

preuve cette proposition se prouve comme la seconde cy dessus.

Theoreme 5eme

si d'un point pris au dela de la circumference on tire des lignes a la circumference convexe du cercle, fig 4 tab 4 la plus courte sera celle qui estant prolongé passeroit par le centre.

preuve si la ligne A B decrit par son

extremité B une circumference, il est clair que cette circumference touchera au point B, la circumference G, C, B, D, F, et qu'elle s'en ecartera dans tous ses autres points, mais d'allieur les lignes A, C, A, D couperont cette petite circumference et passeront au dela puisqu'elles sont terminées a la partie convexe de la circumference G, C, B D F donc elles seront plus longues.

Paragraphe 2ond

2ond moyen de la comparaison des lignes

Leur analogie

1o l'analogie des lignes n'est rien autre chose que leur proportion, proportionalité et progression: cette analogie sert a deco uvrir et etablir la similitude des figures, c'est a dire a connoitre quand elles sont de meme espece:

2o c'est pourquoy nous parlerons 1o des principes de cette analogie, ou des lignes proportionelles 2o de l'usage de cette analogie ou des figures semblables

nombre 1er

principe de l'analogie des lignes, ou des lignes proportionelles

theoreme 1er

si deux lignes l'une perpendiculaire, et l'autre oblique renfermes entre deux

paralelles sont coupes par un nombre soit fini soit infini, de paralelles intermediaires, figure fabl 4 elle seront divises en un nombre egal de parties

preuve il y aura autant d'intersection et de points de division dans l'une des 2 lignes que dans l'autre, donc &

Theoreme 2ond

en supposant que le nombre des paralelles soit infini, dans chacune des lignes coupés les parties seront egales entre elles.

preuve parceque dans chacune des lignes les parties seront infiniment petites

Theoreme 3eme

dans la meme hypothese, les parties correspondantes dans les 2 lignes divises sont inegales entre elles

preuve car les parties corres pondantes dans les 2 lignes etant comprises entre meme paralelle elles doivent estre plus grandes dans la ligne oblique que dans la perpendiculaire

Theoreme 4eme

si on prend dans les 2 lignes un meme nombre de parties correspondantes ces parties seront proportionelles aux lignes totales

preuve car si dans l'une des 2 lignes chaque partie est double, triple & sous double, sous triple, de la ligne totale;

dememe chaque partie dela 2onde ligne sera double, triple &c ou sous double, sous triple &c delaligne totale, parceque les 2 lignes sont divisés en un egal nombre de parties

Theoreme 3eme

Les parties correspondantes dansles 2 lignes coupes, seront pportionelles entre elles.

preuve, 1° elles sont pportionelles auxe lignes totales donc elles sont pportionelles entre elles, car deux raports qui sont egaux a un troisieme raport sont egaux entre eux

preuve 2° les parties correspondantes etant pportionelles auxe lignes totales, sont deslors des parties semblables et de meme nom scavoir ou des moities, ou des tiers ou &c par consequent si une partie dela ligne perpendiculaire est vg sous double dela partie correspondante dans la ligne oblique; il faut que les autres parties dela ligne perpendiculaire soyent aussi soudoubles des parties correspondantes dela ligne oblique.

Corolaire.

de sorte que prenant 2 parties quelquonques dans la ligne perpendiculaire ces parties seront pportionels

1° aux lignes totales 2° auxe 2 parties correspondantes dela ligne oblique cest a dire auxe 2 parties qui seront comprises entre les memes paralelles.

nombre 2ond

Lusage de l'analogie des lignes ou les figures semblables.

nous exposerons 1° le fondement dela similitude

des figures 2e l'enumeration et les preuves
des figures semblables
seconde

FONDEMENT DE LA
similitude des figures
definitione

1° on appelle figures semblables celles qui ont les angles respectifs egaux et les cotes omologues proportionelles
2° autre chose est la similitude et l'egalité des figures. la similitude regarde l'espece, l'egalite regarde la quantite l'egalite depend de l'egalite des angles et des cotes; la similitude au contraire depend de l'egalite des angles et de la proportionalité des cotes

principe 1er

les 2 cotes d'un triangle peuvent toujours est supposé entre 2 lignes paralleles, d[illegible] l'une seroit la base du triangle et l'autre passant par le somet, seroit paralelle a la base fig 11 tab 4
preuve cette suppostion ne renferme aucune contradiction

principe 2ond

si les 2 cotes d'un triangle sont coupés par une ou plusieurs lignes paralelles a la base ils seront coupes en parties pportionelles
preuve faisant passer par le somet du triangle une ligne paralelle a la base des cots on peut

raisonner des costes du triangle comme nous avons fait cy dessus des deux lignes l'une perpendiculaire et l'autre oblique renfermées en deux paralelles

Theoreme 1er

Deux triangles æquiangles, ont leurs costes homologues proportionels figu 11 tab 4

nous les deux angles estant æquiangles si l'on couche le petit triangle A c d sur le grand triangle A B C en sorte que les costes du petit soyent posés sur les costes du grand il arrivera que la base c d du petit sera paralelle a la base B C du grand comme nous l'avons prouvé cy devant or dans ce cas si l'on fait passer par le sommet commun une ligne paralelle a la base, nous pourrons raisonner des costes homologues des deux triangles, comme nous l'avons fait au principe 2ond des costes d'un triangle coupé par une ligne paralelle donc &c

Theoreme 2ond

deux triangles æquiangles sont toujours semblables

preuve parceque d'estlers qu'ils sont equi
angles ils sont et tous leurs angles respectifs
egaux et tous leurs costes homologues pportionels

Theoreme 3eme

si deux cordes se coupent dans un cercle, les
parties de lune seront reciproques aux parties
de lautre fig 14 tab 4.
preuve ayant tiré les lignes DC, AB, on au
ra deux triangles CLD, ALB equiangles
et par consequent semblables, car les angles au
point L sont egaux de part et d'autre etant
opposés au sommet les angles au point D B
sont aussi egaux etant appuyes sur le meme
arc CA donc & par conseqent les costes
homologues sont pportionels et lon trouvera
que par cette raison les parties dune corde
sont reciproques aux parties de lautre

Theoreme 4eme

si dans un triangle rectangle on tire une
ligne perpendiculaire du sommet de l
angle droit au costé opposé qui s'appelle l'hypo
thenuse cette perpendiculaire divisera le grand 3 angle

en deux petits qui seront semblables
sant au grand triangle qu'entre eux
fig 12 tab 4

preuve 1° chacun des petits triangles a un
angle commun avec le grand, de plus
chacun a un angle droit qui par conse
quent est egal a l'angle droit du grand
triangle, donc le 3eme angle est egal de
part et d'autre, donc chacun des petits
triangles est equiangle au grand et par
consequent semblable

preuve 2° les deux petits triangles sont
semblables a un mesme 3eme triangle,
donc ils sont semblables entre eux, d'a
illeurs en comparant les angles respecti
ves il est facile de demontrer qu'ils sont
egaux dans les deux petits triangles

Corollaire 1er.

1° donc les costes homologues des trois

triangles sont proportionels, les ~~hypothenuses~~ aux hypothenuses les grands costes au grand costes, les petits costes aux petits costes

2° donc AC hypothenuse est a BC grand costé du grand triangle, comme BC hypothenuse est a CD grand costé, du moindre triangle, ou plus court AC. BC :: BC. CD on peut dire la mesme chose du grand triangle comparé au plus petit

3° donc chaque coste du grand triangle est moyen proportionel entre l'hypothenuse entier et le segment de l'hypothenuse corres pondants, ou plus court AC. BC :: BC. DC et pareillement AC. AB :: AB. AD

Corollaire 2ond

La perpendiculaire B D est moyenne proportionelle entre les deux abcisses A D et D C; ~~et pareillement~~ car le petit costé A D du petit triangle est au grand costé B D du meme triangle, comme le petit costé B D du moindre triangle est au grand costé D C du meme triangle, ou bien A D . B D :: B D . B C

Corollaire 3eme

Dans un cercle une ligne tirée perpendiculairement d'un point quelquonque de la circumference sur le diametre est moyenne proportionelle entre les deux abcisses du diametre, vg tel est B D entre A D

et D C: car si des extremites dudi
ametre on tire les cordes AB et BC,
Le triangle ABC sera rectangle

Scholie

Ce corollaire peut aussi se deduire
du corolleire de la propon 2ande cy
dessus: car le cas de deux perpendi
culaires qui se coupent dans un cercle,
retombent dans le cas de deux cordes
qui se coupent avec cette difference
que le produit fait sur les parties
d'une corde est un rectangle, et que
le produit de DB X BG est un
quarré

Theoreme 3eme

Si deux lignes partantes d'un mesme
point hors du cercle vont se termi
ner a la circumference concave,

leurs parties exterieurs EA, ED
sont reciproquement proportionels
aues lignes entieres EB, EC, cestadire
on aura EA. ED :: EC. EB

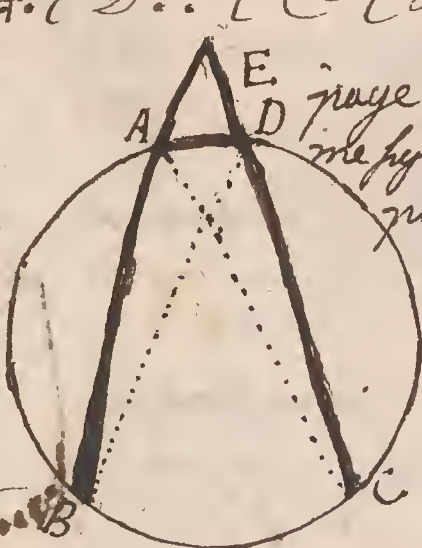


fig. 4 page 210 la meme figure se trouve plus claire

preuve si on mene les cordes AC, BD, on verra que les triangles EBD, EAC sont semblablables

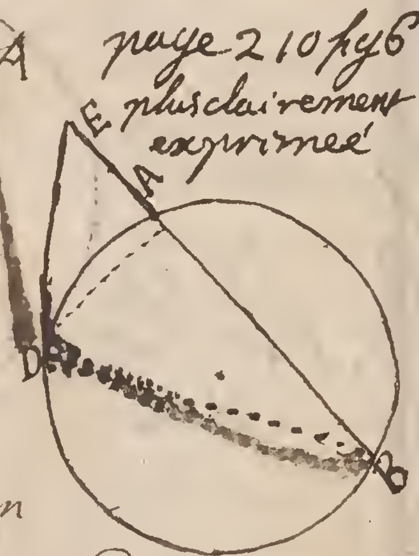
ayant l'angle E commun, et l'angle
B appuyé sur le meme arc AD que
l'angle C, donc les costes homologues
sont proportionels, donc EA. ED ::
EC. EB

Theoreme 6.eme

Si de deux lignes qui partent d'un

152 point hors du cercle, l'une est
secante, et l'autre tangeante La
tangeante CD sera moyenne pro
portionelle entre la secante entiere
CB; et la partie exterieure CA, c'est
a dire on aura CB · CD :: CD · CA
ou CB · CD · CA

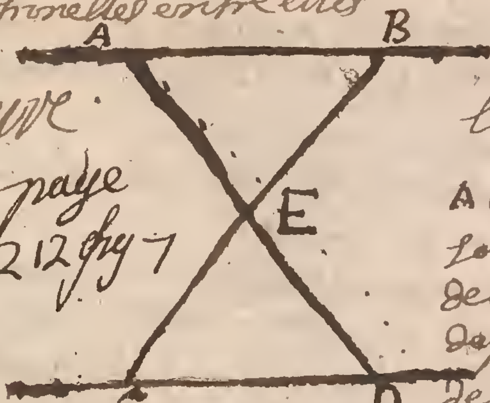
pauge 210 fig6
plus clairement
exprimeé



Preuve car tirant
DB, DA, on verra
que les triangles CDB,
CDA sont semblables
ayant un triangle C com
mun et l'angle CDB = AD
C parce qu'ils sont mesures par la moitie
d'un meme arc AD donc le 3eme angle
est egal de part et d'autre, donc les
costes homologues sont proportionels,
c'est a dire CB · CD :: CD · CA ou ÷ CB · D · CA

Theoreme 7eme

les parties des 2 droites qui se coupent entre 2 paralelles
et proportionnelles entre elles



Preuve

page 212 fig 7

les triangles ABE, CED sont semblables a cause de l'angle E egales de part et d'autre, de l'angle EAB = EDC alternes internes, et de l'angle
EBA = EDC, donc &

Leçon 2onde

enumeration et propriété des figures semblables

Theoreme 1er

2 poligones sont semblables lorsqu'on peut les resoudre en un meme nombre de triangles

preuve parce qu'alors les angles respectifs des poligones sont egaux et leurs cotes homologues, sont proportionelles

Theoreme 2ond

si on coupe les rayons d'un poligone quelquonque, par des lignes continuement paralelles aux cotes du

polygone on aura un 2eme polygone sembla
ble au 1er fig 15 tab 4
preuve car alors on aura 2 poligones resolus en
triangles semblables, et par consequent semblables
aux 2 premiers

Theoreme 3eme

dans les polygones semblables, les cotes homologues
sont proportionelles aux rayons,
preuve si les poligones semblables se divisent en
triangle, ces triangles seront semblables or les rayons
des polygones sont les cotes de ces triangles semblables,
et les cotes des poligones sont les bases de ces memes
triangles, mais dans les triangles semblables les
bases sont proportionelles aux cotes, donc &

Theoreme 4eme

dans les polygones semblables les cotes homologues
sont proportionelles aux apothemes
preuve les poligones semblables ayant eté partages
en triangles semblables, les apothemes sont les
hauteurs de ces triangles et les cotes des poligones
en sont les bases, or dans les triangles semblables
les bases sont proportionelles aux hauteurs, donc &

Theoreme 5eme

dans les polygones semblables, les circumferences,
ou les sommes des cotes sont proportionelles aux
cotes homologues
preuve parceque les contours, ou les circumferences
des poligones semblables sont equimultiples des
cotes homologues donc &

Theoreme 6eme

Dans les poligones semblables les circumferences sont pportionelles, et aux rayons, et aux apothemes

preuve car les circumference sont pportionelles aux cotes homologues, les cotes homologues sont pportionelles et aux rayons, et aux apothemes, donc

Theoreme 7eme

si les poligones semblables sont supposes infiniter, ou sont supposes estre des cercles, les circumferences seront pportionelles aux rayons, ou seront entre elles comme les rayons

preuve parceque les sommes des cotes, quelque soit leur nombre, sont toujours æquimultiples des cotes homologues, et par consequent sont pportionelles, et aux cotes et aux rayons

Corollaire 1er

dans les cercles les circumferences sont entre elles comme les diametres, car les diametres sont æquimultiples des rayons

Corolaire 2cond

dans les cercles les circumferences sont entre elles comme les arcs semblables, cest a dire dun meme nombre de degres, car elles sont æquimultiples des arcs semblables

Corollaire 3eme

dans les cercles concentriques les circumferences sont entre elles comme les arcs interceptes entre 2 rayons. vg comme les arcs d, e; b, c; interceptes entre les rayons ad, ae, car ces arcs sont semblables

Scholie

pour rendre parfaite la theorie cy dessus il ne manquerait plus que de sçavoir le raport exact de la circumference au diametre; mais ce rapport

est ignoré archimede a prouvé que ce raport estoit plus grand que celuy de 21 à 7 mais qu'il estoit plus petit que de 22 à 7, ainsy ce raport est entre les 2 raports cy dessus mentionnes; dans la pratique on suppose ce raport comme de 21 à 7 ou de 3 à 1. parce que l'erreur n'est pas bien sen-sible: plus exactement on suppose ce raport de 355 a 113 ce qui approche de tres pres du vray

Corollaire.

1o tous les triangles æquilateres sont sembla-bles, tous les triangles isoceles sont semblables des lors qu'ils ont un angle egal; mais les 3 angles scalenes ne sont semblables que lorsqu'ils ont 2 angles egaux de part et d'autres

2o tous les quarres sont semblables: les rectangles ne sont semblables que lorsqu'ils ont leurs cotes homologues proportionelles: mais pour que les parallellogrames soyent semblables, il faut que l'on fasse voir que leurs angles respectifs sont egaux, et que leurs cotes homologues sont proportionelles

3o tous les polygones reguliers de meme nom sont des lors semblables: tous les cercles sont sem-blables entre eux: les ovales et ellypses sont sem-blables lorsque leurs aixes sont proportionelles

4o en general les figures soit rectilignes, soit curvi-lignes sont semblables lorsqu'en disposant l'une au dedans de l'autre la circumference de l'aix est exactement parallelle a la circumfe-rence de l'autre

Chapitre 3eme

Des surfaces

il y a 2 sortes de surfaces les rectilignes et les curvilignes; nous allons parler des unes et des autres

article 1er

des surfaces rectilignes

nous parlerons 1o de l'œquation des surfaces rectilignes 2o de leur mesures 3o de leur raport

paragraphe 1er

De l'œquation des surfaces rectilignes

1o les geometres trouvent l'œquation ou l'œgalité de 2 surfaces en 2 manieres; dans l'une ils comparent la position des cotes et la grandeur des angles des figures; dans l'autre ils comparent les espaces qui y sont contenues entre les cotes et les angles; nous ne parlerons icy que de la 1ere maniere; nous parlerons de la 2onde en parlant de la mesure des surfaces.

2o cette methode de trouver l'œgalité de deux surfaces s'applique surtout au triangle, parceque toute figure etant reductible en triangle, il est facile de deduire l'œgalité de deux figures de celles des triangles

3o on peut distinguer six choses dans un triangle, scavoir trois cotes et trois angles; mais parceque 2 angles etant donnes et determines, le 3eme l'est aussi; il suffira de considerer icy 5 choses, scavoir trois cotes et deux angles: or nous

nous allons voir que si dans un triangle 3 de ces 3 choses sont egales aux trois correspondantes dans un autre triangle, les 2 triangles seront egaux en tout

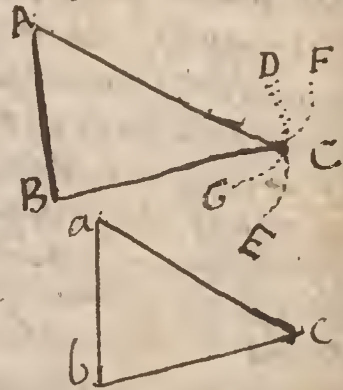
Lemme

deux surfaces rectilignes, par ex 2 triangles deux parallelogrammes, en general 2 polygones sont egaux lorsque les angles respectifs et les cotes homologues sont egaux de part et d'autre

preuve une surface rectiligne est une espace terminée par des cotes et des angles cet espace est d'autant plus grand ou plus petit que les cotes ou les angles sont plus grands ou plus petits donc deux espaces terminés par des angles respectivement egaux doivent estre egaux

Theoreme 1er

deux triangles qui ont tous leurs cotes homologues egaux, sont egaux entre eux



preuve soit les deux triangles ABC, abc, dont tous les cotes homologues sont egaux des points AB comme centres decrivez les arcs DCE, F CG qui se coupent au sommet C. appliquez ensuite le triangle abc sur le triangle ABC en mettant d'abord le point a, sur A a cause de ab, = AB le point b, tombera sur B et a cause de ac, = AC la ligne ac aboutira quelque part dans l'arc FCG de meme a cause de bc = AB la ligne

bc aboutira quelque part dans l'arc D C E
mais parce que les lignes ac, bc, se joignent en c
elles aboutiront donc toutes les deux dans le point
C de l'intersection des deux arcs donc ac
sera exactement couvert sur A C et bc sur
B C et par consequent tout le triangle A B C;
ces deux triangles seront donc egaux

5 Theoreme 2ond

deux triangles sont egaux entre eux, quand
tous les angles de l'un etant egaux a tous les
angles de l'autre, ils ont chacun un coté
homologue egal

preuve soit le coté A B = ab; en posant l'un de
ces deux cotes sur l'autre le point a sur A et b sur
B, il est clair qu'a cause de l'egalité des angles en A B,
le coté ac tombera necessairement sur A C, et bc sur
B C, donc ils se joindront au meme point C donc
tout le triangle a,b,c, sera exactement couvert
sur tous le triangle A B C. donc

6 Theoreme 3eme

2 triangles sont egaux lorsqu'ayant chacun deux cotes
homologues egaux l'angle compris par les cotes est egal dans
chacun

preuve supposons A C = ac, A B = ab, et l'angle A
= a; appliquons ab sur A B et ac sur A C, a cause des
2 angles A et a egaux, les cotes tomberont exactement
l'un sur les autres et parce qu'ils sont supposes egaux le
point c tombera sur C et b sur B donc bc qui mesure
les distances des points b c sera egal, et tombera aussi
exactement sur B C dont le triangle abc couvrira exacte
ment tout le triangle A B C solve

le principe dont nous nous sommes servis pour prouver
l'egalité des triangles dans les 3 cas precedents s'appelle
le principe de la superposition neantmoins nous servirons dans la
d'un autre principe pour prouver l'egalité

paragraphe 2ond
De la mesure des surfaces
rectilignes
Lemme

la surface d'un parallelograme, vy du
parallelograme B A H (sur 3eme tab)
peut estre connu connu, dont que le mouvement
d'une ligne A H qui monte parallellement
a elle meme
preuve en geometrie on peut concevoir que la
generation des figures se fait par le mouve
ment, et c'est pour cela que les geometres rega
rdent la ligne comme formé par le mouvement
d'un point la surface comme formé par le mouvement
d'une ligne, et le solide comme formé par le mouvement
d'une surface

Corolaire 1er

dans l'hipotese precedente le nombre de traces que
laisse la ligne A H en montant est mesuré par la
ligne B A perpendiculaire sur A H cette
preuve cette ligne A H laissant de traces
en glissant le long de la ligne B A qu'il y a de points
dans la ligne B A donc le nombre des traces qu'elle
laisse est mesuré par B

Corolaire 2ond

La ligne A H qui monte parallellement a elle
meme et qui par son mouvement decrit sa surface
s'appelle la base: la ligne perpendiculaire qui
tombe sur cette base et qui mesure la distance qui se
trouve entre la base superieure et la base inferi
eure, s'appelle la hauteur du parallelograme.

Theoreme 1er

la surface du parallellograme est egale au produit de sa base par sa hauteur

preuve puisque la surface du parallellograme est decrite par le mouvement de sa base qui monte et s'eleve parallellement a elle meme, il s'ensuit que cette surface est egale a la base prise autant de fois qu'il y a de points dans la ligne qui mesure la hauteur; or prendre la base autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur c'est multiplier la base par la hauteur, donc &c.

Theoreme 2ond

La surface du triangle est la moitie de la surface d'un parallellograme de meme base et de meme hauteur

preuve si dans le parallellograme A B C D fig 11 fab 2 on tire la diagonale A D, le parallellograme sera divise en deux triangles dont chacun a meme base et meme hauteur que le parallellograme or chacun de ces triangles est precisement la moitie du parallellograme parceque les deux triangles A C D et A B D sont egaux, car 1o ils ont un cote commun A D, et par consequent egal de part et d'autre, ils ont les cotes homologues egaux, parcequ'ils sont cotes opposes du meme parallellograme 2o ils ont leurs angles respectifs egaux, car l'angle C = B parcequ'ils sont des angles opposes dans un meme parallellograme de meme l'angle d = c et l'angle b = a parce qu'ils sont alternes et internes,

Theoreme 3eme

La surface du triangle est egal a la moitie du produit de sa base par sa hauteur

preuve la surface du triangle est la moitie de la surface du parallelograme de meme base et de meme hauteur. or la surface de ce parallelograme est egal au produit de sa base par sa hauteur, donc la surface du triangle n'est egal qu'a la moitie de ce produit

Theoreme 4eme

La surface d'un polygone est egale a la surface de tous les triangles auxquels on peut reduire le polygone en tirant des lignes du centre, ou d'un point quelquonque en dedans du polygone a tous ses angles figure 4 tab 4

preuve la surface du polygone n'est plus distingué de la surface de tous ses triangles, mais elle en est composé, et elle en resulte donc &

Theoreme 5eme

tous ces triangles auxquels on aura reduit le polygone, peuvent eux meme se reduire a un seul triangle;

preuve parceque tous ces triangles se peuvent metre a coté l'un de l'autre en leur donnant a tous une meme hauteur, et leur donnant des base qui soy ent entre elles comme les surfaces de ses triangles, et alors ils n'en formeront plus qu'un seul:

Theoreme 6eme

ce triangle uni qui resulte de la somme de tous les autres peut se reduire a un rectangle.

preuve parceque tout triangle est egal en surface a un rectangle de meme base, et d'une hauteur sous doublé, ou a un rectangle de meme hauteur

est d'une base sous double

Theoreme 7eme

ce rectangle peut encore estre reduit a un quarre de meme surface

preuve qu'on prenne une ligne moyenne propor tionelle entre la hauteur et la base du rectangle, et qu'on eleve cette ligne au quarre, je dis que ce quarre sera egal au rectangle car la hauteur du rectangle soit a, sa base soit b la ligne moyenne proportionelle soit x; on aura a. x :: x. b, donc prenant le produit des extremes et des moyens l'on aura ab = xx donc le rectangle sera egal &

Corollaire

donc toute figure et surface rectiligne se peut reduire en quarre; mais le quarre ne peut luy meme se reduire en une figure plus simple c'est pourquoy le quarre est regarde par les ge ometres comme la mesure la plus simple et la plus naturelle quel'on puisse employer pour mesu rer les surfaces rectilignes; et c'est pour cela que qua drature et mesure, quarre et mesure sont la meme chose chez les geometres

Theoreme 8eme

le poligone regulier est egal a un triangle qui auroit pour hauteur l'apotheme du poligone, et pour base la somme des cotes, ou la circumference du poligone

preuve tous les triangles auxquels on peut reduire le poligone regulier ont meme hauteur et meme base donc un triangle qui auroit la hauteur commune de ces triangles, scavoir l'apotheme,

et pour base la somme des bases de ces triangles scavoir la circumference du polygone seroit égal a tous ces angles, donc

Corollaire 1er

donc la surface du cercle est egale au un triangle, qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, et pour base une ligne egale a la circumference du cercle car le cercle n'est qu'un polygone d'une infinite de costés.

Corollaire 2ond

donc si on appelle le rayon $\underline{r}$, et la circumference $\underline{c}$, l'expression de la surface circulaire sera $\frac{1}{2}\underline{r}\,\underline{c}$, ou $\frac{rc}{2}$

Corollaire 3eme

donc si on pouvoit mesurer geometriquement la circumference du cercle, on auroit dés lors sa quadrature scavoir en reduisant le cercle en un triangle; ce triangle en un rectangle; et ce rectangle en un quarré:

mais jusqu'a present on na pas trouvé de methode pour mesurer la circumference: on sçait seulement que le raport le plus exact que l'on puisse determiner entre la circumference et le diametre est celuy de 355 à 113

paragraphe 3eme

Du raport des surfaces rectilignes

1° Les surfaces, de meme que les lignes, ont un raport entre elles il y a cette difference que le raport ou la raison qui est entre les lignes est simple, parce qu'elles n'ont qu'une dimension au lieu que le raport qui est entre les surfaces est composé,

parceque les surfaces resultent du produit de deux dimensions
2° lorsque les surfaces sont des figures semblables, la raison qui est entre elles est doublée: lorsqu'elles ne sont pas des figures semblables leur raison est alors composé: nous parlerons 1° de la raison composé des surfaces, 2° de la raison doblée des surfaces

vombre 1er

De la raison composé des surfaces rectilygnes

Theoreme 1er

tous les parallelogrames de meme base et contenus entre meme paralelles, sont egaux entre eux tels sont les parallelogrames A B D C, E F G J K bg, fig 1 tb 5

preuve car tirant une infinité de paralelles tun op & intermediares, les sections que laisseront ces parallelles dans les parallelogrames seront egales entre elles, et quand au nombre et quand a la grandeur; pour le nombre parce qu'il est infini; pour la grandeur, parceque chacune de ces sections est egale a la base.

Corollaire:

Les triangles de meme base contenus entre meme paralelle; sont egaux entre eux; parcequ'ils sont des moities de parallelogrames de meme base et renfermes entre memes paralelles

Theoreme 2nd

Les parallelogrames dont il a eté parlé dans

La proposition precedente sont chacun egaux au rectangle n° 9 p de meme base - - - -
et contenus entre meme parallelles.

preuve parcequ' ayant tiré une infinité d'autres paralelles, ce rectangle et chacun des paralle logrames contient un meme nombre de sections égales faites par ces paralelles

Corollaire

Deux parallelogrames un parallelograme et un rectangle, deux triangles de meme hauteur et de meme base, sont egaux chacun a chacun: parcequ'ils ont une meme base; et qu'ayant meme hauteur, ils peuvent estre concus renfermes entre memes paralelles

Theoreme 3eme

si les parallelogrames ont des hauteur et des bases inegales alors ils ne sont plus egaux, mais ils ont entre eux en raison composé de meme base et de meme hauteur

preuve chaque parallelograme est egal au produit de sa base par sa hauteur, donc les parallelogrames sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs, or les produits sont en raison composé des racines des facteurs, des multiples des quels ils resultent donc

Corollaire 1er

si les parallelogrames ont meme hauteur: ils sont entre eux comme les bases: et si ils ont meme base ils sont entre eux comme les hauteurs. car appellant les parallelogrames

Si p; les hauteurs A, a; les bases, B, b;
on aura par la proposition precedente S. p
:: AB . ab or par l'hypothese A = a donc
on peut a leur place substituer l'unité et l'on
aura S. p :: B . b; il faut dire la mesme chose
des triangles

Corollaire 2ond

Si la hauteur et la base d'un parallelogramme
sont reciproques a la hauteur et a la base d'un autre
parallelogramme (il faut dire la mesme chose des
triangles) les parallelogrammes seront egaux:
car a cause de la raison reciproque on aura A . a
:: b . B donc on aura AB = ab et pareille
ment si AB = ab, on aura A . a :: b . B

Corollaire 3eme

donc pour juger si 2 surfaces sont egales il y a trois
moyens 1o si les surfaces ont mesme base et mesme
hauteur, elles seront egales 2o si les surfaces ont
des hauteurs et des bases reciproquement proportion
elles elles seront aussi egales 3o si les surfaces ont
tous leurs angles respectifs egaux, et leurs cottes
homologues egaux elles seront egales

Scholie

le 3eme moyen de prouver l'egalité des surfaces
par l'egalité parfaite des angles et des cottes, ne
s'applique ordinairement qu'au triangle parce
qu'ils sont ~~aussi~~ les seules figures ausquels ils
puissent s'appliquer.
car de ces six choses trois angles et trois cottes
il suffit de prouver qu'il y en a trois egaux

savoir ou les trois cottes, ou deux angles et un cotté, ou deux cottes et un angle pour prouver que les deux triangles sont parfaitement egaux, comme nous l'allons faire voir

Theoreme pême

les poligones sont entre eux comme les surfaces des triangles auxquels on peut les reduire

preuve la surface de chaque poligone ne'st pas distingué de la surface des triangles auxquels il peut estre reduit, mais elle en resulte; donc les surfaces de deux poligones sont entre elles comme les surfaces de ces triangles

Corollaire

si des triangles auxquels on aura reduits les poligones ont tous meme hauteur, alors les poligones seront entre eux comme leurs contour, leur perimetre, leur circumference; parcequ'ils seront entre eux comme les bases de ces triangles dont la somme fait la circumference de chaque poligone.

Theoreme 3eme

Les poligones reguliers sont entre eux en raison de leurs apothemes et de leur demie circumference, ou sont entre eux comme les produits de leurs apothemes par la demie circumference

preuve les poligones etant reguliers chacun d'eux est egal a un triangle qui auroit pour hauteur l'apotheme et pour base la circumference du poligone; or ce triangle est egal au produit de sa hauteur par la moitie de sa base, donc chaque poligone regulier est egal au produit de son apotheme par la demie circumference, donc deux poligones reguliers

nombre 2 [illegible]

De la raison doublé des surfaces rectilignes

Theoreme 1er

deux parallelogrames semblables sont en raison doublé de leur base et de leur hauteur. preuve les parallelogrames sont en raison composé de leur base et de leur hauteur comme a esté prouvé; donc si la raison des bases est egale a celle des hauteurs, cette raison composée deviendra doublée or quand les parallelogra mes sont semblables, la raison des bases est egale parceque dans les parallelogrames semblables les cotes homologues sont propor tionelles, et par consequent les hauteurs sont proportionelles aux bases, cest a dire on a cette proportion A a :: B . b dont la raison doublée est grand AB, ab, qui representent les paralle logrames eux memes

Corollaire 1er

les parallelogrames semblables sont entreeux comme les quarrés des hauteurs ou les quarres des bases cest a dire on aura AB . ab :: AA . aa ou comme BB . bb: car les deux A . a, et B . b, estant egales a cause de la proportion A . a :: B . b, cest la meme chose de multiplier la premiere raison par la 2onde pour avoir AB . ab; ou de multiplier par elle meme pour avoir AA . aa, puisque cette 1ere raison est egale a la 2onde

Donc on aura AB·ab :: AA·aa ou·BB·bb;
en effet si un parallelograme est double de lau
tre par la hauteur et double par la base sa sur
faise sera deux fois double ou quadruple de la
raison de lautre
et tout au contraire si un parallelograme est sous
double d'un autre par la hauteur et sous double par
la base, sa surface sera quadruple de la surface
de lautre

Corollaire 2ond

les parallelogrames semblables sont entre eux
comme les quarres des cotes homologues

Theoreme 2ond

les triangles semblables sont en raison double de
leur base et de leur hauteur ils sont entre eux
comme les quarres de leur bases ou les quarres
de leurs hauteurs; en un mot ils sont entre eux
comme les quarres des cottes homologues
preuve les triangles semblables sont les moities
des parallelogrames semblables, ors on peut
appliquer aux parties semblables ce qui a ete dit
des touts parceque les parties semblables sont
entre elles comme les touts, donc &

Corollaire 1er

dans tout triangle rectangle le quarre de l'hypo
thenuse est egal a la somme des quarres des
autres cottes fig. 5 tab 5
preuve parceque ayant abaisse une perpen
diculaire du sommet de langle droit on a trois
triangles semblables qui ont pour hypothenuse les
cottes du triangle rectangle; or ces trois triangles
semblables sont entre eux comme des quarres des

costes homologues, et par consequent le grand triangle etant egal a la somme des deux autres, le quarré fait sur l'hypothenuse du grand triangle doit estre egal a la somme des quarres faits sur les costes homologues ou hypothenuse des deux triangles.
cette proposition qui est la 47 eme du 1 livre a pour auteur pythagoras qui fut si charmé d'avoir trouve une verité si sublime et de si grande utilité, qu'il immola aux dieux 100 beufs pour les remercier

Corollaire 2ond

il suit du precedent corollaire, que connoissant deux costes dans un triangle rectangle il est facile de connoitre le 3eme; car
1° connoissant les deux costes qui soyent supposes vg estre 3 et 4 on connoitra l'hypothenuse prenant les quarres 9 et 16 dont la somme dont la somme 25 est le quarré de l'hypothenuse, et dont la racine 5 sera l'hypothenuse elle meme:
2° connoissant l'hypothenuse et un costé on trouvera l'autre costé en retranchant le quarré du coste connu du quarré de l'hypothenuse et prenant la racine quarré de la difference

Scholie

1° mais connoissant 2 costes, on ne peut pas toujours exprimer numeriquement le 3eme; vg si les costes connus sont deux et trois, en ajoutant leur quarré 4 et 9 on aura 13 quarret de l'hypothenuse. or le nombre 13 n'a point de racine quarrée et par ceux l'hypothenuse ne peut pas estre exprimé numeriquement ou par un nombre
2° cependant connoissant deux costes, on peut toujours atteindre et exprimer le 3eme geometriquement

ou par hypot. vy dans le cas precedent traçant la ligne AB = 13 figure 6 tab 4, et la prolongeant de sorte qu'on ait BC = 1; car alors ayant decrit le cercle ADC, la perpendiculaire BD donnera le 3eme costé scavoir l'hypothenuse. en effet comme BD est moyenne proportionelle entre AB et BC, on aura AB . DB :: BD . BC et par consequent $DB^2 = AB \times BC = 13 \times 1 = 13$

Corollaire 3eme

si dans le triangle rectangle dont on a parlé cy dessus l'angle droit devient ou obtu ou aigu alors le quarré de l'hypothenuse deviendra plus grand ou plus petit que la somme des quarrés des deux autres costes: on peut meme assigner par le calcul en ce cas l'excés ou la difference du quarré de l'hypothenuse sur la somme des quarres des deux autres costes

Theoreme 3eme

Les surfaces de tous les polygones quelconques sont en raison doublée des costés homologues qui composent les quarres auxquels on peut reduire les polygones

preuve les polygones sont entre eux comme les quarres auxquels ils peuvent estre reduits, or ces quarres sont en raison doublée de leurs costes homologues, donc &c

Theoreme 4eme

les polygones semblables sont entre eux en raison doublée de leur circumference

preuve car si on reduit chacun de leurs polygones en un triangle egal en surface au polygone ces triangles seront semblables, or les triangles

semblables sont en raison doublée de leur base, et ces bases sont elles mesmes les circumferences des polygones donc

Theoreme 5eme

Les poligones semblables sont entre eux en raison doublée de leurs costes homologues

preuve ils sont entre eux en raison doublée de leur circumference, or leur circumferences sont comme les costes homologues donc

Theoreme 6eme

Les surfaces des poligones semblables sont entre elles en raison doublée de leur rayon, et de leur apotheme.

preuve La chose est evidente par elle meme, d'ou il suit que les polygones semblables sont aussi entre eux comme les quarres, ou de leurs rayons, ou de leurs apothemes ou en un mot des lignes semblablement tirees dans les poligones

Corollaire

donc les surfaces des cercles sont entre elles comme les quarres de leur circumference ou de leur diametre ou de leur rayons.

Corollaire 2ond

en un mot les surfaces semblables sont entre elles comme les figures semblables faites sur les costes homologues, ou sur des lignes quelconques semblablement tirees dans les poligones d'ou il suit que dans un triangle rectangle non seulement le quarre de l'hypothenuse est egal au quarre des deux autres costes; mais aussi qu'une figure quelconque faite sur l'hypothenuse est egalle a la somme des figures semblables faites sur les autres costes.

article 2ème

Des surfaces curvilignes

1° nous ne parlerons point icy des surfaces curvilignes planes, tels sont les surfaces des cercles: ces surfaces ne sont courbes que d'un sens, et on les appelle courbes a simple courbure mais nous parlerons des surfaces courbes a double sens, et qu'on appelle pour cette raison courbes a double courbure, tels sont les surfaces silendriques, sphérriques

2° nous traitrons 1° de la mesure des surfaces curvilignes 2° de leur raport et comparaison

paragraphe 1er

De la messure des surfaces curvilignes

hypothese 1ere

representes vous que le plan A B C D fig 2 tab 6 coule le long de la ligne B L appellé directrice et se meuvent parallelement a luy meme: si ce plan laissoit a chaque point une trace de sa figure, il est evident qu'il en resulteroit le corps ou le solide F A C G H que l'on appelle en general un prisme de cette hypothese nous deduirons par voye d'analyse des moyens pour evaluer les surfaces des solides curvilignes dont la theorie sera fondée sur celle des solides rectilignes

Definition 1ere

un prisme est un corps qui dans toute son etendue

etendue a une grosseur egale, qui est terminé par 2 bases l'une superieure, et l'autre inferieure semblables, egales et paralleles, et est entouré de faces qui sont des parallelogrames

Definition 2conde

1º un prisme est appellé triangulaire, quadrangulaire, pentagonale &c selon que la figure generatrice est un triangle, un quadrilatere, un pentagone &c

2º un prisme est appellé droit quand la ligne BC sur laquelle il a été formé, est perpendiculaire a la base du solide mais il est appellé oblique, lorsque cette ligne s'incline sur la base

Definition 3eme

1º si le plan generateur est un parallelograme, le solide engendré s'appelle un parallelipede; les faces opposes des parallelipedes sont des parallelogrames egaux, semblables, et paralleles:

Definition 4eme

si le plan generateur est un poligone d'une infinité de costes ou un cercle; alors le solide s'appelle silendre: ainsi le silendre peut estre regardé comme un prisme dont les faces sont une infinité de parallelogrames qui ont une largeur infiniment petite on y distingue deux surfaces, la surface convexe, qui n'est rien autre chose que le contour du silendre: et la surface totale qui outre le contour, contient les deux bases circulaires:

Definition 5eme

si le plan generateur est un poligone fini dont les costes decroissent uniformement c'est a dire d'une quantité infiniment petite chacun a chaque instant et a mesure que le plan s'eleve le long de

La directrice jusqu'a cequ'il devienne nul alors le solide se terminera en pointe, et aura pour face des triangles et s'appelle pyramide:
1° cette pyramide est triangulaire, quadrangulaire &c selon que le plan generateur est un triangle, un quarre &c fig 2 table 9.
2° si le plan generateur est un polygone infini c'est a dire un cercle, alors la pyramide devient un cone: un cone peut donc estre regardé comme une pyramide dont les faces sont des triangles qui ont des bases infiniment petite

Hypothese 2onde

Supposons que le plan generateur, vg le parallelograme CABJ fig 10 tab 5 au lieu de s'elever parallelement a luy mesme comme dans l'hypothese precedente tourne circulairement autour de l'un de ses cotes, vg autour du costé AB pris comme axe. on aura alors une autre voye pour engendrer les solides d'ou l'on deduira des moyens pour evaluer d'une autre facon leurs surfaces

Definition 3eme

1° Si le plan generateur est un parallelograme CAJB qu'il soit supposé faire sa revolution autour du coste AB pris comme axe il est clair que ce plan decrira dans sa revolution un cylindre
2° si le plan generateur est un triangle ACB, le solide decrit par la revolution du plan

sera un cosne figure 11eme tab 5

3° si le plan generateur est un trapese de CB figure 11 table 5, alors il decrira dans la revolution un cosne tronqué

4° si le plan generateur est un demi cercle, alors il decrira dans sa revolution une sphere

Definition 2eme

1° dans le silendre, le cosne, et la sphere, la ligne autour de laquelle s'est fait la revolution, s'appelle aixe: Le silendre et le cosne sont appellés droits si l'aixe est perpendiculaire a l'horison, et ils et ils sont appellés obliques, si l'axe est panché sur l'horison

2° dans la sphere les extremités de l'axe s'appellent poles; le cercle qui est egalement distant des deux poles de la sphere s'appelle equateur tout cercle qui divise la sphere en deux parties egales ou dont le plan passe par le centre, s'appelle grand cercle au contraire tout cercle dont le plan ne passe pas par le centre et qui coupe par consequent la sphere en deux parties inegales, s'appelle petit cercle.

hypothese 3eme

on peut encore supposer que le cube est composé de quatre pyramides quadrangulaires de meme hauteur dont les sommets s'unissent en un meme point

2° si plusieurs pyramides de meme hauteur et de meme base sont supposés unies entre elles de sorte que leurs sommets repondent tous a un meme point il en resultera un solide qu'on appelle polyedre parce qu'il a plusieurs faces

3° si les faces du polyedre sont supposées infinies en nombre, et infiniment petites en grandeur le polyedre deviendra une sphere

~~preuve la surface du polyedre n'est rien d'autre que celle de tous ces triangles dont il en est composé et elle en resulte donc~~

Theoreme 1er

la surface convexe du cylendre est egal au produit de la circumference de la base par la hauteur du cilendre

preuve lorsque le parallelogramme CAJB fig 10 (fab) decrit le cylendre dans sa revolution il est evident que les lignes AC, LOH, BJ decrivent des cercles dont la somme donne la solidité du cylendre et que les points C, H, J decrivent des circumference dont la somme donne la surface convexe du cylendre, or la somme de ces circumferences est egale au produit d'une des circumferences mais le nombre de ces circumferences est mesuré par la hauteur du cylendre ou par la ligne CJ ou AB donc &c

Corollaire 1er

1° la surface convexe du cylendre est egal a un rectangle qui auroit pour base une ligne egale a la circumference de la base du cylendre et une hauteur egale a celle du cylendre la preuve en claire

2° ce rectangle s'appelle le developpement de la surface cylendrique parceque si l'on developpoit la surface du cylendre ce developpement deviendroit le rectangle mentionné

Corollaire 2me

il est aisé parceque qui vient d'estre dit de mesurer la surface totale du cylendre parcequ'a la surface

convexe il ne s'agit que d'ajouter les surfaces de
deux cercles que l'on scait mesurer par ce qui a
été dit cy dessus

Corollaire 3eme

par ce qui vient d'estre dit, il ne sera guère difficile de
mesurer la surface d'un cube et d'un parallelipede,
il n'y aura pour cela qu'a multiplier le contour de
la base par sa hauteur

Theoreme 2ond

La surface convexe d'une pyramide droite
et reguliere est egale au produit du contour de
la base par la moitie de l'apotheme ou de la
ligne tiré du sommet perpendiculairement
sur un des cotes qui forme le contour de la base
preuve La surface convexe de la pyramide est
egale a la surface de tous les triangles qui entourent
la pyramide or la pyramide etant droite et sa
base etant un poligone regulier, toutes les faces
triangulaires de cette pyramide seront egales
elles seront de meme hauteur et de meme base
donc on en aura la surface totale en multi
pliant le contour de la base de la pyramide, par
la moitie de la hauteur commune des triangles
ou par l'apotheme de la pyramide, cy par la ligne
AB fig 2 fab 6

Theoreme 3eme

La surface convexe d'un cone est egale au produit
de la circumference de la base par la moitie
de l'apotheme
preuve La surface convexe du cone n'est diff
erente de celle de la pyramide qu'en ce que
les triangles qui forment la surface d'un cone

ont une base infiniment petite parceque la circumference de la base du cone est un polygone d'une infinite de costes; mais il est toujours vray que la surface de tous ces triangles est egale au produit du perimetre de la base par la moitie de la hauteur commune des triangles, ou par la moitie de l'apotheme du cone, donc &

Corollaire 1er

Donc la surface convexe du cone est egale a la surface d'un triangle rectangle ABC fig 2 tab 13 dont la ~~b~~ base seroit egale a la circumference de la base circulaire du cone, et dont la hauteur seroit egale a l'apotheme du cone

Corollaire 2ond

La surface du cone est egale au produit de l'apotheme multiplie par le contour de l'element qui est au milieu entre le somet et la base

preuve car elle est egale comme il a été prouvé au produit de l'apotheme par la moitie du contour de la base, or le contour de l'element qui est au milieu entre le somet, et la base est premierement egale a la moitie du contour de la base; parceque le contour de la base de croissant uniformement, comme nous avons dit, Lorsque cette base s'eleve parallelement a elle meme pour former le cone, il suit qu'au milieu du cone ce contour devient precisement La moitie de celuy de la base, et qu'il tient le milieu entre le contour entier de la base, et le point du sommet, qui est le zero de ce contour,

qui est devenu nul.

Corollaire 3eme

1° si dans la hauteur A C du triangle A B C figure tab 13 on prend la partie A E = D G partie de l'apotheme du cone, on aura la surface du petit cone D G H egale au triangle A D E car comme dans le cone les contours des elements decroissent en raison de leur distance du sommet de meme dans le triangle A B C les lignes paralelles a la base decroissent en raison de leur distance du sommet du triangle, donc la base B C etant egale au contour correspondant dans le cone car l'un et l'autre sont pris a egale distance de part et d'autre du sommet, ors d'ailleur par l'hypothese A E = D G; donc le cone D G H est egal en surface au triangle A D E qui a pour base le contour G H et pour hauteur l'apotheme D G: d'ou il suit

2° que le cone tronqué G E F H est egal en surface au trapeze D B C E, car si de tous egaux on retranche des parties egales, les restes demeureront egaux

Corollaire 4eme

donc la surface du cone tronqué est egale au produit de l'apotheme par le contour qui tient le milieu arithmetique entre ces deux bases superieurs, et inferieurs: car la surface du cone tronqué G H E F est egal comme on l'a prouvé au trapeze D B C E dont la base B C = E F contour de la base inferieure du cone, et la base D E = G H contour de la

 base superieure du cone, or la surface du trapeze D B C E est egale au produit de sa hauteur qui est l'apotheme du cone, par la ligne qui tient le milieu arithmetique entre ces deux bases, laquelle ligne moyenne arithmetique est egale au contour moyen arithmetique dans le cone: car ayant tiré la ligne D C, le trapeze est resolu en deux triangles dont le premier B D C est egal au produit de la hauteur du trapeze par la moitié de la base inferieure B C; et le 2ond C D E est egal au produit de la meme hauteur par la moitie de la base superieure D E, donc les deux triangles, ou le trapeze est egal au produit de sa hauteur par la moitie de la somme B C + D E, or la ligne moyenne arithmetique entre les deux bases D E et B C est egale a la moitie de la somme de ces deux bases, car appellant cette moyenne arithmetique x, on aura $BC \cdot x \cdot\cdot x \cdot DE$, donc $BC + DE = x + x$, donc $\frac{BC+DE}{2} = \frac{x+x}{2}$, ou ce qui est le meme $\frac{BC+DE}{2} = x$, donc

Theoreme 6eme

La surface de la sphere est egale au produit de son axe ou diametre par la circonference d'un de ces grands cercles

preuve le demi cercle generateur petit D B A B C fig: 3 tab 13 est un poligone regulier d'une infinité de cotes infiniment petits scavoir O B B A &c les petits cottes par la revolution du demi cercle autour de l'axe d L deviennent

des apothemes de cones tronques renfermes entre les plans O F, B D, A B & de sorte que la surface de la sphere est egale a la somme des surfaces de tous ces cones trouves qui sont seulement si donc on demontre que la surface de chacun de ces cones tronques, est egale au produit de son axe par la circumference d'un grand cercle de la sphere a laquelle est circonscrit on aura demontré que la somme des surfaces de tous ces cones tronques est par consequent que la surface de la sphere est de meme est egale au produit de la somme de tous leurs axes ou au produit de l'axe entier de la sphere par la circonference d'un grand cercle de la sphere ors la surface de chacun de ces cones tronques, vg A B D E est egale au produit de son axe par la circumference d'un grand cercle de la sphere
pour le prouver mené Y R parallele a B D, A E
Y S perpendiculaire qui passera par le centre C de la sphere et en sera un axe: tires la perpendiculaire B Z = E T X et la perpendiculaire B S: cela posé les 2 angles rectangles A B Z et Y R S seront semblables, car outre qu'ils ont chacun un angle droit et par consequent egal de part et d'autre on a de plus l'angle B A Z = R S Y: en effet l'angle B A Z = B Y R correspondants, et B Y R = R S Y parcequ'ils ont chacun pour mesure la moitie du meme arc Y O F R, donc l'angle

BAZ = RSY donc les deux triangles ABZ, YRS, sont semblables; donc leurs costes homologues etant proportionels, on aura AB · BZ ou TX : YS · YR or les circumferences des cercles sont entre elles comme leur diametre, donc appellant C la circumference d'un grand cercle et c celle d'un petit cercle on aura AB · TX :: CYS · cYR, donc AB × cYR = TX × CYS, or la surface du cone tronqué ABD{ = AB × cYR donc elle est aussi egale au produit TX × CYS, c'est a dire elle est egale au produit de son axe par la circumference d'un grand cercle.

Corollaire

donc la surface de la sphere est quadruple de la surface d'un grand cercle de cette meme sphere: car appellant la circumference de ce grand cercle c, et son diametre 2r, on aura la surface du grand cercle $= \frac{1}{2} rc$, et la surface de la sphere $= 2rc$ or $2rc$ est quadruple de $\frac{1}{2} rc$ donc &

paragraphe 2ond

du rapport et de la comparaison des surfaces curvilignes

Theoreme

si l'on circonscrit un cilindre a un sphere

fig: 14. tab 5. la surface convexe du cylendre sera egale a la surface de la sphere

preuve. La surface convexe du cylendre est egale au produit de sa hauteur qui est l'axe de la sphere, par la circumference de la base qui est la circonference d'un grand cercle de la sphere, or la surface de la sphere est egale au produit de ce meme axe par cette meme circonference, donc &c

Corollaire 1er

donc la surface convexe du cylendre est quadruple de la surface de sa base qui est un grand cercle de la sphere, et par consequent la surface totale du cylendre est a la surface convexe du cylendre, et a la surface de la sphere comme 6 est a 4, ou comme 3 est a 2

Corollaire 2eme.

si on coupe la sphere et le cylendre circonscrit par une infinité de plans paralleles A B, D E, F G &c fig: 15 tab 5 chaque zone spherique contenue entre deux paralleles quelconques sera egale, a la section cylendrique correspondente c'est a dire contenue entre les memes paralleles. car la surface de la demie sphere A D F estant egale a la surface du demi cylendre A D F H il est necessaire que les portions correspondantes de l'une et l'autre surface soit egale en grandeur, puisqu'elles le sont en nombre

Corollaire 3eme.

et si l'on concoit la surface cylendrique comme la somme d'un infinité de circumferences

-uniformes, et la surface spherique comme la somme d'une infinité de circumferences qui decrivissent depuis l'equateur jusqu'au pole, il suit que chaque circumference spherique decrite par les points A, D, F, G, est egale a chaque circumference cylendrique decrite par les points correspondants A D F H, quoique ces circumferences ayent des rayons inegaux; car ces circumferences doivent estre regardes comme des anneaux d'une largeur infiniment petite, contenue entre les memes plans paralleles

Corollaire 3eme

donc 1° le point culminant de la sphere sçavoir le point G, doit estre censé egal a la circumference cylendrique decrite par le point H: car le point G peut estre regardé comme la derniere circumference de la sphere decrite par le point G qui est par consequent egal a la circumference correspondante dans le cylendre decrite par le point H; cette remarque a eté faitte en angleterre comme on le peut voir dans les transactions physiques de la societé royal de londres

2° et comme le point culminant de la sphere est l'extremité de l'axe, il s'en suit que l'axe de la sphere faisant une revolution autour de luy meme, decriroit par son extremité une circumference infiniment petite egale a une circumference finie, sçavoir a la circumference cylendrique decrite par le point H

Scholie

La raison d'un phenomene spherique que nous venons d'etre marquer dans les corrollaires precedents, est que les circumferences qui composent la surface cylendrique sont uni formes et egales depuis la base inferieure jusqu'a la base superieure; et qu'au contraire les circumferences qui composent la surface spherique sont les unes plus petites a raison du diametre, mais aussi sont plus larges, et deviennent des zones qui ont plus d'obliquité, et par consequent de largeur a mesure qu'elles s'approchent des poles

Corollaire 5eme

les surfaces des spheres sont entre elles comme les quarres de leurs rayons, ou de leurs axes, car les surfaces spheriques sont des surfaces semblables qui sont par consequent entre elles comme les quarres des dimentions homologues

Chapitre 4eme

Des solides

comme il y a deux sortes de surfaces, il y a aussi deux sortes de solides, scavoir les rectilignes et les curvilignes

article 1er

Des solides rectilignes

nous parlerons 1° de la mesure des solides rectilignes 2° du rapport de leur solidité —

paragraphe 3er

de la mesure des solides rectilignes

theoreme 1er

La solidité du prisme est egale au produit de la base par sa hauteur

preuve on peut concevoir que le prisme est formé par le mouvement d'une surface qui monte parallelement a elle meme le long d'une ligne droite et qu'ainsi le prisme n'est qu'un amas de surfaces posées les unes sur les autres, or la solidité du prisme est egale a la somme de ces surfaces, et la somme de ces surfaces est egale a la surface qui sert de base multipliée par le nombre des surfaces, lequel nombre est mesuré par la hauteur du prisme, donc &

theoreme 2one

La solidité du prisme est egale au produit de ses trois dimentions hauteur, largeur, profondeur,

preuve, car elle est egale au produit de sa hauteur par sa base, laquelle base est elle meme le produit de la largeur par la profondeur donc

corrollaire

c'est pour quoy appellant la hauteur a la largeur b et la profondeur c la solidité du prisme sera = abc

theoreme 3eme

de meme que le triangle est la moitié du parallelogramme de meme base et meme hauteur, ainsi la pyramide est non la moitie mais le tiers du prisme

de meme base et de meme hauteur
preuve en effet de meme que icy le quarré estant divisé par des diagonales tirés de chaque angle a l'angle opposé, se trouve partagé en 4 triangles dont chacun est la 4eme partie du quarré, et que ces triangles pris deux a deux peuvent se réduire en un seul de meme base et de meme hauteur que le quarré, et qui sera par cette raison la moitie de ce quarré
ainsi on peut concevoir un cube divisé par des diagonales tirés de chaque angle a l'angle opposé et se coupant toutes au centre, et alors le cube est divisé en 6 pyramides egales dont les sommets seront reunis au centre et dont les bases seront appuyés sur les faces du cube: or chacune de ces pyramides ayant memes bases, et une hauteur sous double par rapport au cube, est la 6eme partie du cube, et par consequent deux de ces pyramides prises ensemble peuvent estre réduites a une seule pyramide de meme base et meme hauteur que le cube qui sera la 3eme partie du cube donné

Scholie
La raison pour la quelle le triangle est moitie du parallelograme de meme hauteur et de meme base, fait que la pyramide n'est que le tiers du prisme de meme hauteur et de meme base, et que le triangle peut estre conçu comme un parallelograme dont la largeur decroit pour former le triangle, et pareillement la pyramide peut estre regardée comme un prisme qui decroit dans toute sa longeur

pour former la pyramide; or lorsque le parallelogramme decroit pour former le triangle, de deux especes de dimensions qu'il a, il ne perd que d'une seule, savoir de la largeur, et par cette raison devient une surface sousdouble; au contraire lorsque le prisme decroit pour former la pyramide, de trois dimensions qu'il a, il perd de deux, scavoir de la largeur et de la hauteur, et par cette raison devient un solide soustriple

Theoreme 4eme

La solidité de la pyramide est egale au tiers du produit de ses trois dimensions

Preuve La pyramide n'est que le tiers du prisme de meme base et de meme hauteur, or la solidité du prisme $= abc$, donc la solidité de la pyramide $= \frac{1}{3} abc$

Theoreme 5eme

De meme que les polygones peuvent se resoudre en triangles dont les sommets se reunissent en un point commun, et dont les bases soyent les costes du polygone, ainsi les polyedres peuvent se resoudre en pyramides dont les sommets se reunissent au centre du polyedre, et dont les bases soyent les faces du polyedre

Theoreme 6eme

De meme que tous ces triangles auxquels on resoud les polygones peuvent estre reduits en un seul triangle egal en surface au polygone, de meme toutes ces pyramides auxquels on resoud le polyedre, peuvent estre reduites en une seule pyramide egale en solidité au polyedre

Theoreme 7eme

de meme que tout triangle peut estre reduit en parallelograme de meme base et d'une hauteur sousdouble, qui soit egale en surface au triangle, ainsi toute pyramide peut estre reduitte en un prisme de meme base et d'une hauteur soustriple, qui soit egale en solidité a la pyramide

Theoreme 8eme

1° de meme que tout parallelograme peut se reduire en un rectangle, et tout rectangle en un quarré de meme surface; ainsi tout prisme peut se reduire en un parallelipede, et tout parallelipede en un cube de meme solidité.

2° et c'est pourquoy de meme que le quarré est la mesure la plus simple que l'on puisse employer pour mesurer les surfaces planes, ainsi le cube est la mesure la plus simple que l'on puisse employer pour mesurer les solidites

Corollaire

c'est pour cette raison que dans l'usage on evalüe les surfaces planes en poules, ou pieds, ou toises quarrées, et qu'on evalüe les solides en poules, ou pieds, ou toises cubiques

paragraphe 2ond.

Du rapport des solidites

1° les solides, de meme que les lignes, ont un rapport entre eux: il y a cette difference que le rapport qui est entre les lignes est simple parce qu'elles n'ont qu'une dimension; que le rapport qui est entre les surfaces est composé de deux raports, parce qu'elles ont deux dimensions; et que le raport qui est entre les solides est

 composé de trois rapports, parcequ'ils ont trois dimensions, sçavoir longeur, largeur et profondeur; 2° Lorsque les solides sont semblables, leur rapport ou leur raison est dite triplée, de meme que la raison qu'ont entre elles les surfaces semblables, est dite doublée; on appelle solide semblable ceux qui sont terminés par des angles egaux, et par un meme nombre de faces qui sont des figures semblables
Nous parlerons 1° de la raison composée des solidites,
2° nous parlerons de leur raison triplée

nombre 1er

Delaraison composée des solidites

Lemme

de meme que les triangles, les parallelogrammes les rectangles & peuvent estre conceus placés entre les memes paralleles sçavoir. parallelogr &, et qu'alors ils ont evidemment meme hauteur, ainsi les parallelipipedes les prismes les pyramides & peuvent estre conceus placés entre des plans paralleles et alors ils ont evidemment meme hauteur

Theoreme 1er

comme les parallelogrammes D A B C, & A F G & sçavoir. parallelogr. de meme base placés entre un meme paralleles sont egaux entre eux et egaux chacun au rectangle Q NOP parcequ'ils ont meme base et meme hauteur de meme les parallelipipedes obliques placés entre meme plan parallelle sont egaux entre eux, et egaux chacun au parallelipipede droit, placé entre les memes plans, parcequ'ils ont meme base et meme hauteur.

Theoreme 2nd.

comme les parallelogrammes de meme base et meme

hauteur sont demontrés estre egaux entre eux parceque les paralleles plusieurs qui les traverses laissent dans chacunes d'eux des sections egales en nombre et en grandeur de meme on demontre que les parallelipedes de meme base et de meme hauteur sont egaux entre eux parcequ'ils sont coupés et traversés par des plans paralleles ces plans paralleles laisseront dans chacun des sections egales en nombre et en grandeur

Corollaire

1° il faut dire la meme chose pour les pyramides de meme hauteur et de meme base

2° il faut dire la meme chose pour les prismes de meme hauteur et meme base

3° en un mot il faut dire la meme chose de touts les solides de meme espece qui ont meme base, et meme hauteur, ce qui ayant meme base peuvent estre contenus entre les memes plans paralleles

Theoreme 2eme

si les solides ont des hauteurs et des bases inegales, alors ils ne sont plus egaux, mais ils sont entre eux en raison composée de leur base et de leur hauteur.

preuve chaque solide, d'un mouvement uniforme est egal au produit de sa base par la hauteur, donc deux solides uniformes sont en raison composée de leur base et de leur hauteur.

Theoreme 3eme

Les solides sont entre eux en raison composée de leurs dimensions

preuve nommant les solides S. s. supposés que les dimensions de S soyent A, B, C, et que les dimensions de s, soyent a, b, c, je dis que l'on aura S. s :: ABC. abc: car S = ABC

et $p = abc$, donc $B \cdot p :: ABC \cdot abc$

6 theoreme 5eme

si les dimensions d'un solide sont reciproquement proportionels aux dimensions d'un autre solide, vy si $AB \cdot ab :: c \cdot C$, ou si $A \cdot a :: bc \cdot BC$, alors les deux solides seront egaux

preuve car dans l'une ou l'autre proportion cy dessus, on aura $ABC = abc$ donc & en effet dans le cas des dimensions reciproquement proportionelles, le deffaut de hauteur dans l'un des solides est compensé par l'exces de la base, ou le deffaut de base est compensé par l'exces de hauteur

Corollaire 1er

si deux solides ont meme hauteur, ils seront entre eux comme les bases; ou s'ils ont meme base, ils seront entre eux comme les hauteur

Corollaire 2eme

si deux solides ont meme hauteur, et que leurs bases soyent des figures semblables vy des quarres, ou des pentagones, ou des exagones & semblables ils seront alors en raison doublée soit de leur largeur soit de leur profondeur car ces deux solides seront entre eux comme leurs bases, or leurs bases etant des figures semblables sont en raison doublée de leurs dimensions homologues qui sont ou la largeur ou la profondeur du solide

nombre 2eme

De la raison triplée des solidites

7 theoreme 1er

si deux solides sont semblables, il seront triplé ocequiangles

eq[u]iangles 2° ils auront leurs dimentions homo
logues proportionelles, cest adire on aura A · a
:: B·b :: C·c

preuve car pour que les solides soyent semblables
il faut 1° que tous leurs angles correspondant soyent
egaux 2° que leurs faces correspondantes soyent
des figures semblables, or les figures semblables
sont des costes homologues proportionels, et les
costes des faces des solides sont les dimentions des
solides donc &

Theoreme 2one

Les solides semblables A en raison triplée
de leurs dimensions homologues –

preuve les solides P p. sont en raison composée de leurs
dimensions, cest adire on a P · p :: ABC · abc ·
mais a cause de la similitude des solides, leurs
dimensions homologues sont proportionelles
ou bien lon a A · a :: B · b :: C · c donc la raison
qui en est composée est triplée, et par consequent
lon aura ABC · abc :: A3 · a3 :: B3 · b3 :: C3 · c3,
et en effet un solide qui sera deux fois plus haut,
deux fois plus large, et deux fois plus profond
sera octuple d'un autre solide

Corrolaire 1er

cest pourquoy de meme que deux surfaces sem
blables dont l'une a une largeur double et une
hauteur double de l'autre peuvent estre regardé
comme les extremes d'une progression geometrique
dont le quotient seroit 2, et qui auroit 3 termes,

savoir de la progression ÷ 1·2·4 parceque la raison qui est entre le 1er et 3eme terme lesquelles representent les deux surfaces, est doublée de la raison du premier au 2ond terme qui tous deux represen-tent les dimentions homologues.
ainsi deux solides semblables dont l'un seroit double de l'autre par la hauteur, la largeur et la profondeur, peuvent estre regardé comme les ex-tremes d'une progression dont le quatrieme seroit 2 et qui auroit 4 termes, ~~de~~ sçavoir de la progression ÷ 1·2·4· 8· parceque la raison qui est entre le premier et le 4eme terme qui represente les solides, est triplé de la raison du 1er. au 2ond qui represente les dimentions homologues: en effet la raison de 1·2 etant doublée donnera 1·4· et etant triplée donnera 1·8

Corollaire 2ond.

c'est pourquoy de meme que lors qu'on a un quarré, pour en trouver la racine il faut cher-cher un terme moyen proportionel entre l'unité et le quarré connu, parceque dans cette progr-ession ÷ 1·2·4· le 1er terme est l'unité, le 2ond est la racine, le 3eme est le quarré.
ainsi lors qu'on a un cube, pour en trouver la ra-cine cubique, il faut chercher deux termes moyens proportionels entre l'unité et le cube connu, par-ceque dans la progression ÷ 1·2·4·8· le 1er terme est l'unité, le 2ond est la racine cubique.

pareillement dans la progression $\div 1 \cdot x, x^2, x^3$. il est evident que le 2ond terme $\underline{x}$ est la racine quarrée: c'est pourquoy, si il falloit trouver la racine cubique $\sqrt{y}$ de 27 il faudroit trouver entre 1 et 27 deux moyens pportionelles en faisant la progression $\div 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27$

Corollaire 3eme

mais si l'on avoit le cube 2 dont il faudroit trouver la racine cubique, il est evident que dans la progression $\div 1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 = 2$. on ne pourroit pas trouver la valeur des termes moyens pportionels $\underline{x}$ et x^2. parceque la quantité 2 n'a ny racine quarrée ny racine cubique.

Corollaire 4eme

c'est pourquoy si l'on proposoit de faire un cube qui fut precisement double d'un autre cube a^3 ce cube double devant estre $2a^3$, il est clair qu'en cherchant deux moyens pportionels entre 1 et $2a^3$, et qu'elevant au cube le 1er des deux moyens pportionels, on auroit le cube proposé: de meme que si l'on proposoit de faire un quarré double d'un autre quarré a^2, ce quarré double devant estre a^2 $2a^2$, il est clair que prenant un moyen pportionel entre 1 et $2a^2$, et l'elevant au quarré, on auroit le quarré double proposé
ainsi le probleme de la duplication du cube si fame ux chez les geometres se reduit a trouver deux termes moyens pportionels entre 1 et 2. lesquels moyens

termes ne peuvent pas se trouver arithmetiquement mais geometriquement, et par une methode composé

Scholie 1ere

Le probleme de la duplication du cube etoit celebre chez les anciens geometres; on dit qu'il fut proposé par l'oracle de delphe qui demande que l'autel d'ou sortoint les oracles, et qui etoit un cube, fust rendu double: or pour la solution du probleme il s'agissoit de trouver deux lignes moyennes proportionelles entre l'unité et le cube donné

Scholie 2onde

par la seule methode simple c'est a dire en employant seulement la regle et le compas qui sont les seuls instruments qu'il soit permis d'employer quand on procede par des voies geometriques simples, on peut, il est vray, trouver un quarré double d'un autre, parceque suposant la ligne AB de deux pieds fig. 13 tab. 1ere et faisant BC d'un pied la ligne BD sera moyenne proportionelle entre AB et BC et par consequent sera la racine quarré de la ligne AB de deux pieds,

mais parceque pour doubler le cube il faut trouver 2 termes moyens proportionels entre 1 et 2, on ne peut par consequent resoudre le problemé par la seule geometrie simple mais il faut avoir recours aux sections coniques qui seules peuvent

donner les deux lignes moyennes proportionels que l'on demande

article 2ond

Des solides curvilignes.

1° les solides curvilignes sont ceux qui sont terminés par des surfaces courbes: nous en allons deduire la theorie de celle des solides rectilignes

2° lorsque le polyedre est regulier, c'est à dire lorsqu'il a toutes ses faces egales entre elles, il est egal en solidité a une pyramide dont la base seroit egale a la somme des faces du polyedre, et dont la hauteur seroit egale aux rayons du polyedre

theoreme 1er.

La sphere est egale en solidité a un cone qui auroit pour base la surface de la sphere et pour hauteur les rayon de la sphere

preuve La sphere peut estre regardé comme un polyedre regulier qui auroit une infinité de faces infiniment petites, et le cone comme une pyramide dont les faces triangulaires seroient infiniment petites, or de meme que le polyedre fini est egal a une pyramide qui auroit pour hauteur le rayon du polyedre et pour base la surface du polyedre, ainsi le polyedre infiniter doit estre egal à

Theoreme 2ond

cest pourquoy la solidité de la sphere est le tiers de celle d'un cylindre dont la base seroit egale a la surface de la sphere, et dont la hauteur seroit egale au rayon de la sphere.

preuve car la sphere est egale en solidité a un cone qui auroit la hauteur et la base susditte or ce cone n'est que le tiers du cylindre mentionné ainsi appellant la sphere S. le rayon R la surface spherique S et le cylindre C, on aura C = R S. et S. = un tier R S.

Theoreme 3eme.

si le cylindre C mentionné avoit une hauteur double c'est a dire egale au diametre de la sphere alors la sphere ne seroit que la sixieme partie de ce cylindre

preuve car ce cylindre devenant alors double la sphere deviendroit au cylindre comme $\frac{1}{3}$ est a 1.

Theoreme 4eme

si la base du cylindre qui est supposé egale a la surface spherique, venoit a decroitre jusqu'a n'estre plus egale qu'a la surface du grand cercle de la sphere alors la sphere deviendroit les $\frac{2}{3}$ de la solidité de ce cylindre.

preuve la base de ce cylindre n'egale quelle

etoit a la surface de la sphere, devient egale
seulement a la surface d'un grand cercle de la
sphere deviendroit alors sous quadruple de
quadruple qu'elle etoit auparavant, car la
surface de la sphere est quadruple de celle
du grand cercle, et par consequent de 4 devi
endroit 1, et par consequent la sphere seroit a
ce cylendre comme $\frac{1}{6}$ est a $\frac{1}{4}$, ou en mul
tipliant ces deux fractions par le meme nombre
4 comme $\frac{4}{6}$ est a $\frac{4}{4}$, ou comme $\frac{2}{3}$ est a 1

theoreme 5eme.

La solidité de la sphere est les deux tiers de la
solidité du cylendre circonscrit

preuve le cylendre circonscrit est celuy qui a
meme hauteur que la sphere, et qui a pour
base un grand cercle de la sphere, or nous
venons de prouver que la sphere est a ce
cylendre ou que S. C :: $\frac{2}{3}$. 1

theoreme 6eme

le cone inscrit a la sphere ou qui a meme
hauteur que la sphere et pour base un grand
cercle de la sphere, est la moitie de la solidite
de la sphere

preuve La solidité de la sphere est les $\frac{2}{3}$ de la
solidité du cylendre circonscrit or la solidité

du cone inscrit a la sphere et au cylendre n'est que ce $\frac{1}{3}$ de la solidité du cylendre, donc elle est precisement la moitie de la solidité de la sphere

Corollaire

c'est pourquoy si a une sphere on inscrit un cone et circonscrit un cylendre, de la sphere et du cone comme $1 . \frac{2}{3} . \frac{1}{3}$

ce raport entre les solidités de la sphere, du cone et du cylendre a été trouvé par Archimede, qui fut si charmé de cette decouverte qu'il voulut que sur son tombeau on fit graver une sphere avec un cylendre circonscrit, et un cone inscrit.

Corollaire general
de
toute la geometrie speculative

1° jusqu'a present nous avons parlé du contour ou perimetre des figures, nous avons mesuré leurs surfaces, ~~et~~ nous avons fait voir comme on pouvoit trouver les raports qu'ont entre eux soit les perimetres, soit les surfaces de differentes figures

2° mais il faut remarquer que dans les figures

le rapport des contours est bien different de celuy des surfaces, et de plus qu'il s'en faut bien qu'en geometrie toutes les lignes, toutes les surfaces ayent un rapport connu et puissent estre mesurés

3° la raison en est que deux figures peuvent avoir meme contour et differentes surfaces ou reciproquement, et c'est ce qu'on appelle les isoperimetres et pareillement que deux lignes, ou deux surfaces peüvent n'avoir aucun rapport geometrique entre elles et par consequent ne puissent estre mesurées l'une par l'autre, et c'est ce qu'on appelle les grandeurs incommensurables. nous allons parler des unes et des autres

Chapitre 1er.

Des isoperimetres

theoreme 1er.

les lignes, les surfaces, et les solidites ne sont point dans le meme rapport

preuve si les lignes qui terminent une surface sont en raison double et sous double c'est a dire comme 2.1, les surfaces seront en raison quadruple et sous quadruple, ou comme 4.1

et les solidités seront en raison octuple, et sous octuple, sçavoir comme 8.1. car le raport des lignes est simple, celuy des surfaces est composé, et celuy des solidités est encore plus composé: en effet la ligne est une quantité simple. la surface est le produit de deux lignes et le solide est le produit de 3 lignes.

Corollaire

1° c'est pourquoy si un corps vient a croitre et a s'augmenter, sa solidité croitra dans une plus grande raison que sa surface, et sa surface dans une plus grande raison que son diametre.
2° au contraire si un corps vient a decroitre, sa solidité decroitera en plus grande raison que sa surface, et sa surface en plus grande raison &c.

Theoreme 2 ond

Les diametres et les solidités de deux corps etant les mesmes, la surface sera d'autant plus grande ou plus petite qu'elle sera terminée par un plus grand ou plus petit nombre d'angles
preuve moins il y a d'angles, plus la surface du corps s'approche du centre, et moins cette surface enveloppe par consequent de solidités.

Theoreme 3eme

de plusieurs figures iso perimetres, triangles, quarré, pentagones, &c celle qui a le moins de surface est le triangle, et celle qui en a le plus est le cercle.
preuve chacune de ces figures (en les supposant regulieres) est egale au produit de son rayon par la

mente de son perimetre, donc le perimetre etant le meme, la surface sera d'autant plus petite que le rayon sera plus petit, or de toutes les figures isoperimetres depuis le triangle jusqu'au cercle, le triangle est celle qui a le plus petit rayon, et le cercle est celle qui a le plus grand rayon donc &c

Corollaire

donc de toutes les figures isoperimetres celle qui a le plus de costes, a plus de surfaces; et celle qui a moins de costes, a moins de surfaces.

Theoreme 4eme

de deux figures isoperimetres de meme espece, celle qui a le plus de regularité, aura plus de surfaces.

preuve parceque l'irregularité de la figure raproche les costes de la figure plus prest du centre, et par consequent les costes, ou le contour formé par les costes renferme moins de surfaces et de capacité

Corollaire

c'est pourquoy le quarré a plus de surfaces que le parallelograme isoperimetre, parceque sa figure est plus reguliere et le parallelograme luy meme conservant toujours le meme perimetre renfermera d'autant plus de surfaces, que ses costes approcheront plus de l'egalité, parceque a lors il deviendra plus regulier

en effet supposons que la somme des costes ou le perimetre est 8, si l'on divise 8 en parties egales 4 et 4. et si l'on multiplie 4 par 4 pour avoir le quarré,

on aura une surface 4 X = 16. au contraire si on divise 8 en parties 5 et 3 et qu'on les multiplie, on aura une surface 5 X 3 = 15 qui est plus petite que 16; pareillement si l'on divise 8 en parties 6 et 2, on aura 6 X 2 = 12 qui est encore plus petit que 15 et ainsi du reste.

Theoreme 6eme

de tous les solides isoperimetres depuis le tetraedre jusqu'a la sphere, le tetraedre est celuy qui a le moins de solidité; et la sphere est celuy qui en a le plus.

preuve parceque le tetraedre est de tous les solides isoperimetres qui a le moins d'angles, et la sphere est celuy qui en a le plus, car dans les solides la rareté des angles car dans les solides la rareté des angles raproche les faces du centre, lesquelles par consequent renferme dés lors moins de solidité

Chapitre 2ond

Des incommensurables

proposition 1ere

1° les nombres sont commensurables par l'unité, parceque l'unité est une partie aliquote commune qui prise un certain nombre de fois mesure chaque nombre

2° les nombres sont commensurables, non seulement par l'unité, mais par des parties aliquotes distingues de l'unité, v.g. les nombres 2 et 3 peuvent estre mesurés non seulement par l'unité, mais par

3° les fractions elles memes sont commensurables entre elles et avec les nombres entiers elles sont di je commensurables, en reduisant et les nombres et les fractions au meme denominateur

proposition 2onde

1° deux ou plusieurs nombres ont souvent plusieurs parties aliquotes ou mesures communes. car les nombres ont autant de mesures communes, qu'ils ont de diviseurs communs, tels sont les nombres 12 et 18 qui ont pour mesure commune 2, 3, 6 car ils peuvent chacun estre divisé par chacun des 3 nombres 2, 3, 6,

2° la plus grande quantité soit numerique soit geometrique par laquelle on puisse diviser 2 quantités, s'appelle le plus grand commun diviseur, se trouve des lors reduite a leurs plus simples termes: vg on reduit une fraction a sa plus simple expression en divisant son numerateur et son denominateur par son plus grand commun diviseur

proposition 3eme

1° un nombre qui est une puissance parfaite a toujours une racine attignable; vg le nombre 4 qui est un quarré parfait, a pour racine quarré le nombre 2 or cette racine s'appelle racine numerique rationelle, commensurable attignable.

2° mais un nombre qui n'est pas une puissance parfaite, n'a aucune racine assignable vg le nombre 3 n'a aucune racine quarrée, et pour cette raison la quantité $\sqrt{3}$ s'appelle racine irrationelle, racine sourde & parce qu'elle ne peut estre exprimé par aucun nombre possible, ou numeriquement, quoiqu'elle puisse estre representé en ligne, ou geometriquement comme nous l'avons dit pg. 13 table 1ere

proposition 4eme

1° une quantité double, triple, d'un quarré parfait n'est pas elle meme un quarré parfait et par consequent n'a pas de racine quarré: vg 2×4 n'est pas un quarré parfait non plus 2aa: car si 2 peur 4 ou deux aa etoit un quarré parfait, donc $\sqrt{2\times4}$ ou $2\sqrt{2}$, et racine $\sqrt{2aa}$ ou a $\sqrt{2}$ seroit une racine numerique, ors $\sqrt{2}$ n'est pas une quantité numerique et rationelle, donc &

2° une quantité quadruple d'un quarré est elle meme un quarré parfait, et par consequent a une racine numerique tels sont les quantités 4×4 ou 4aa dont les racines sont $\sqrt{4\times4}$ = 2×2 = 4, et $\sqrt{4aa}$ = 2a, et ainsi du reste

3° mais une quantité quintuple, sextuple, septuple, d'un quarré parfait n'est pas elle meme un quarré parfait en un mot le produit d'un quarré

parfait par une quantité quelquonque il n'est luy meme un quarré parfait que lorsque la quantité qui multiplie le quarré est elle meme un quarré

Corollaire 1er

de la il suit que divisant un quarré par une partie $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ &c en un mot par une partie aliquote d'un quarré non quarrée elle meme, on aura point pour quotient un quarré parfait

Corollaire 2ond

il faut raisonner des autres puissances sçavoir du cube de la 4eme 5eme puissance de la meme maniere que nous venons de raisonner du quarré, proportion gardée

Theoreme

La diagonale est incommensurable avec le coté du quarré

preuve soit la diagonale AC fig 3 16 4, le quarré de la diagonale AC est double du quarré fait sur le coté AB, car il est egal comme nous l'avons prouvé a la somme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ et comme $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ donc le quarré de la diagonale est $2\overline{AB}^2$ or la quantité $2\overline{AB}^2$ n'est pas un quarré parfait donc il n'a pas de racine numerique et commensurable

Corollaire 1er

pareillement si la figure ABCD etoit un rectangle

figure 1ere

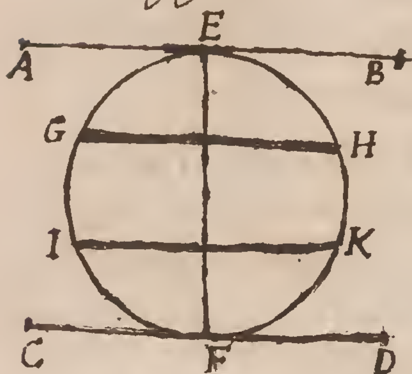


FIGURE 2onde

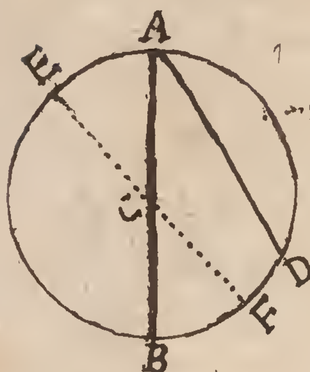


FIGURE 3eme

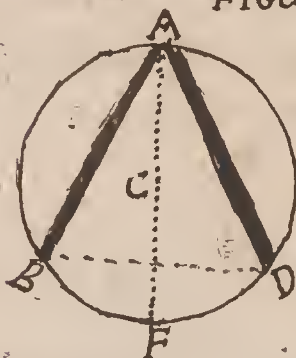


FIGURE 4

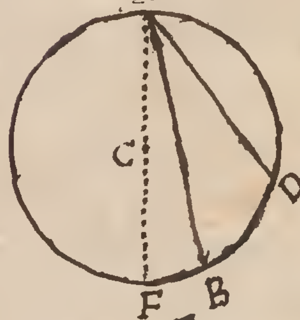


FIGURE 5

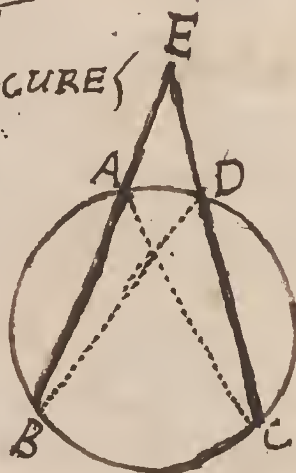
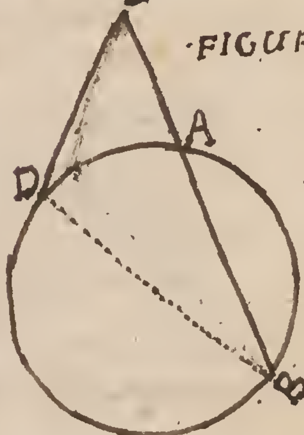
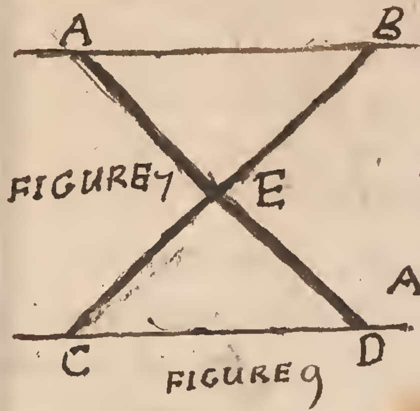


FIGURE 6





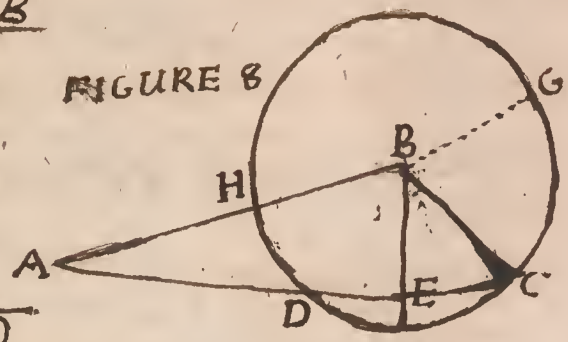
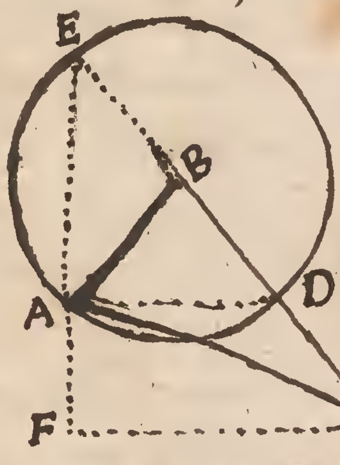
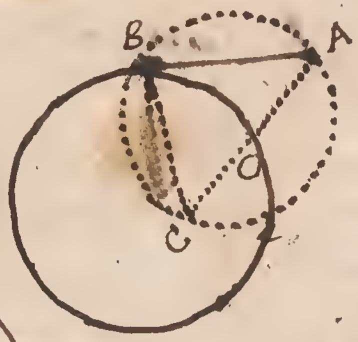


FIGURE 9

FIGURE 10





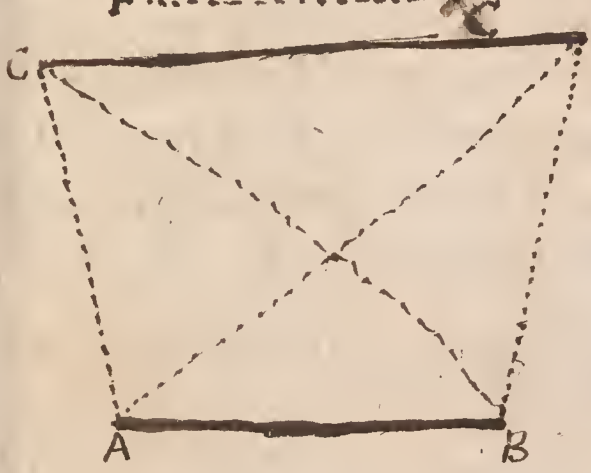
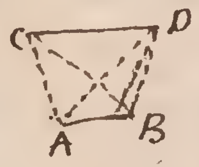


FIGURE 11



dans lequel la somme de $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ne fut pas un quarré parfait dans ce cas la diagonale seroit encore incommensurable avec le costé du rectangle: il arriveroit tout le contraire si dans le rectangle la somme $AB^2 + BC^2$ devenoit un quarré parfait

Corollaire 2ond

Le quarré d'une racine sourde est une quantité rationelle, vy le quarré de $\sqrt{2}$ est le nombre 2 qui est rationel mais son cube qui est $2\sqrt{2}$ est irrationel au contraire sa 4eme puissance ou son quarré quarré qui est $2+2=4$ est encore rationel, mais sa 5eme puissance ou son quarré cube qui est $4\sqrt{2}$ est une quantité irrationelle

Corollaire 3eme

D'ou il suit que la diagonale et le costé du quarré estant incommensurable dans leur 1ere puissance, leurs quarrés sont commensurables, leurs cubes sont incommensurables, leurs quarres quarres sont commensurables, leurs quarres cubes sont incommensurables &c

Fin du 2ond Livre

Livre 2eme

pratique de la geometrie simple

1° la geometrie pratique est la geometrie en tant qu'elle opere sur son objet. le but de la geometrie speculative est de demontrer celuy de la geometrie pratique est d'executer

2° il y a cette difference entre la geometrie theorique et pratique, que la geometrie theorique est precise et rigoureuse dans ses principes, et dans ses demonstrations; au lieu que la pratique ne l'est point dans ses operations. La raison en est que celle la considere son objet dans un etat metaphysique et de possibilité, au lieu que cellecy considere son objet dans un etat phisique et d'existence, or les figures considerées sous ce dernier respect ne sont point susceptibles d'operations precises, et rigoureuses tant parceque elles renferment beaucoup de defectuosités, que parceque pour les mesurer, on est obligé de se servir de calcul d'approximation, d'instruments qui ne sont point exacts, et ne peuvent l'estre &

3° la geometrie pratique dont le but est d'operer sur son objet et de le mesurer, pour y

parvenir a recours a des voyes simples, des methodes faciles, affin de rendre l'execution aisée pour cela elle a retranché du calcul et de la mesure dont elle se sert toutes les difficultés qui s'y rencontrent autant qu'elle peut et elle y introduit des methodes abregées, qu'il nous faut maintenant exposer; c'est pourquoy nous parlerons 1o du calcul pratique 2o de la mesure pratique

section 1ere

Du calcul pratique

on distingue deux sortes de calculs pratiques 1o le calcul decimal, 2o le calcul Logarithmique

chapitre 1er

Du calcul decimal

propon 1ere

La premiere difficulté que le geometre rencontre dans le calcul vient des fractions, et cela

1o par ce que dans la division des nombres, plus les nombres que l'on divise sont petits, plus les fractions se rencontrent souvent et moins on peut les negliger vg si on divise 3 par 2 la division ne peut se faire exactement et il y reste par consequent une fraction qu'on

ne doit pas negliger parceque cette fraction est une quantité de quelque consequence par raport a un petit nombre comme 3

2° parcequ'en effet le calcul des fractions n'est pas si aisé que celuy des nombres entiers

proposition 2conde

C'est pourquoy les geometres pour eviter les inconvenients qui viennent des fractions le prenaient de cette maniere quand ils ont un petit nombre a diviser par un autre, pour eviter qu'il y ait de reste, et par consequent des fractions, ils le divisent en un plus grand nombre de parties, ay apres avoir divisé le jour en 24 heures, lorsqu'ils veulent prendre une heure avec une demie, ou une quart, on doit pour n'estre point obligé de representer cette quantité par les fractions et les fractions des fractions $1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ &c ils ont divisé l'heure en 60 parties egales, qu'on appelle minutes, ou plutost ils ont divisé le jour entier ou les 24 heures en 1440 minutes, chaque minute en 60 secondes, chaque seconde en 60 tierces, & et cela posé une heure et demie au lieu de l'exprimer par $1 + \frac{1}{2}$ s'exprime plus commodement

par 60 + 30 = 90 minutes; par la meme raison ils ont divisé le cercle non en 4 parties seulement, mais en 360 parties egales, qu'on appelle degrés, et chaque degré en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes &c

Corollaire 1er

1° dans l'operation susditte, il vaut mieux diviser la quantité en un plus grand nombre qu'en un plus petit nombre de parties: car plus la quantité sera divisée et sous divisée, si il vient a se glisser quelque erreur dans le calcul, il sera d'autant moins sensible, qu'il y aura plus de parties, parcequ'alors chaque partie sera plus petite et de moindre consequence

2° par la meme raison il vaut mieux dans la pratique se servir de grands instruments et qui soyent divisés en un plus grand nombre de parties, et c'est pour cela que les geometres pour mesurer la surface de la terre, la divisent d'abord en arpents, divisent l'arpent en cent perches, la perche en 3 toises, la toise en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, et la ligne en 12 points

Corollaire 2nd

ayant ainsi divisé la quantité sur laquelle

on opere en un grand nombre de parties, quoi que les parties que l'on y peut prendre, v.g. 15 degres, ou 30 degres de le cercle, soyent reellement de veritables fractions $\frac{15}{360}$, $\frac{30}{360}$, cependant parce qu'elles ont le meme denominateur, elles peuvent estre regardes comme des nombres entiers, et sont susceptibles de meme genre d'operation que le nombres entiers

Regle 1ere

pour qu'une quantité qui n'a qu'un petit nombre de parties, soit divisé en un plus grand nombre; pour que le jour qui n'a que 24 heures soit divisé en un plus grand nombre de parties, il faut le multiplier par un nombre quelconque v.g. 60, et luy donner en [illegible] ce nombre pour denominateur, et l'on aura $\frac{1440}{60}$ ou en supprimant le denominateur, au lieu de 24 heures ou de 24 parties egales qu'on avoit auparavant l'on aura 1440 parties egales, dont chacune ne sera que une partie $\frac{1}{60}$

Regle 2onde

pour diviser plus facilement une quantité en un plus grand nombre de parties, il vaut mieux augmenter ce nombre de parties en multipliant par les nombres decimaux 10. 100. 1000. &c plutost que par tout autre nombre: parce que la multiplication par les nombres decimaux est plus aisé et plus –

propriete: ainsi pour augmenter le nombre des parties dans les quantites 32 et 25, j'auray en multipliant par 10, $\frac{320}{10}$ et $\frac{250}{10}$ ce qui s'exprime d'une façon plus abregé comme cecy 32·0 et 25·0; en multipliant par 100 j'auray $\frac{3200}{100}$ et $\frac{2500}{100}$ ce qui s'exprime plus brievement par 32·00 25·00 en mettant un point qui soit suivi d'autant de caracteres qu'il y a de Zero dans le denominateur de ainsi soit entendu

pp onzeme

ces nombres 32·0, 25·0; ou bien 32·00 et 25·00, ou d'autres semblables s'appellent fractions decimales; ors dans ces fractions decimales les quantites 32·0, 32·00, 32·000 &c sont egales entre elles; et sont toutes egales au nombre 32, par ce qu'une quantité multiplié par un nombre quelconque demeure tousjours la meme pour veu qu'elle soit divisée ou entendue divisee par le meme nombre par lequel elle a eté multipliee

pp douzeme

Les fractions decimales sont susceptibles des memes operations, addition soustraction &c que les nombres entiers; en observant quelques que l'on

ecrit les fractions decimales les unes sous les autres, il faut que les points se repondent les uns aux autres de cette maniere 32 · a

34 · aa

ppoon 5eme 25 · aaa

sans nous arrester aux operations que l'on peut faire sur les fractions decimales, on verra tout d'un coup la maniere dont il faut operer sur ces fractions, soit pour les ajouter soit pour les soustraire, soit pour les multiplier, et on la verra dis je en les rappellant a leur etat naturel de fractions, ou ce qui est la meme chose en leur donnant leur denominateur sous entendu, car alors pour les ajouter, soustraire etc, il n'y aura qu'a observer les regles que nous avons données sur les fractions ordinaires.

Chapitre 2ond

Du calcul Logarithmique

ppoon 1ere

1° la seconde difficulté que le geometre rencontre dans le calcul provient de la multiplication et surtout de la division et a plus forte raison de l'exaltation et de l'extraction

2° Le fameux nepper ecossois a trouvé une

22°
methode de substituer l'addition a la multiplication, et l'exaltation; aussi bien que la soustraction: a la division et l'extraction

proposition 2 ordre

cette substitution se fait par le moyen de deux progressions l'une arithmetique et l'autre geometrique placés l'une a coste de l'autre

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

or ce que l'on fait dans l'une de ces progressions sçavoir dans la geometrique, par multiplication ou division, se fait dans l'autre sçavoir dans l'arithmetique par addition et soustraction en effet si dans la progression arithmetique j'adjoute un terme a luy mesme vg 1 + 1 j'auray la somme de ses extremes 0 + 2 pareillement

si je prend les 4 termes 1·3·5·7 jauray la somme des extremes 1+7=3+5 somme des moyens au lieu que dans la progression geometrique je ne dois pas ajouter un terme a luy meme vg 2+2 pour avoir la somme de ses extremes 1+4: mais je dois le multiplier par luy meme pour avoir non la somme mais le produit des ses extremes c'est a dire il faut avoir 2+2 = 1+4: pareillement si je prend les termes 2·4·8·16, jauray 2+16 = 4+8 ensorte que l'addition ou la soustraction que l'on fait d'une part repond a la multiplication ou a la division que l'on fait de l'autre

unzieme

10 les termes de la progression arithmetique qui correspondent aux termes de la progression geometrique s'appellent leur logarithmes, or voicy l'usage et l'utilité de ces Logarithmes dans le calcul

2° si dans la progression geometrique on cherche le produit de deux termes vg 8 et 32, au lieu de les multiplier l'un par l'autre, il sera plus court et plus facile d'ajouter leur logarithmes qui sont 3 et 5 dont la somme 8 qui est un terme

de la progression arithmetique repond au terme 256 de la progression geometrique, lequel terme est le produit cherché des deux termes 8 et 32.

3° pareillement s'il faut diviser le nombre 256 par 8, il n'y a tout d'un coup qu'a soustraire 3 logarithme de 8, du terme 8 logarithme de 256, et la difference 8 − 3 = 5 est le logarithme de 32, terme de la progression geometrique qui est le quotient de 256 divisé par le nombre 8

4° s'il faut elever 32 a la 2eme puissance il n'y a qu'a doubler son logarithme 5 ce qui sera 5*2 = 10 qui repond au terme de la progression geometrique 1024 lequel est la 2onde puissance de 32: si l'on cherche la 2onde racine d'un terme quelconque, qu'on soudouble son logarithme, et ainsi du reste

5° il faut dire la meme chose de la 3eme 4eme 5eme &c puissances et racines

6° c'est pourquoy si ces deux progressions etoient continuées a l'infini, on verroit qu'elles seroit d'usage establie pour un geometre

1° il y a une infinité d'especes de progressions

geometriques, les unes sont doubles comme 1·2·4·8 &c
Les autres sont triples comme 1·3·9 & il y en a de quadruples comme 1·4·16 &c toutes les progressions sont contenues dans la serie des nombres naturels 1·2·3·4·5·6·7·8 &c.
2° Il faut que les termes de la progression geometrique soyent composees des termes de la serie des nombres naturels autrement la table des logarithmes ne seroit point generale: c'est pourquoy comme on a trouvé 0·1·2·3; & pour les logarithmes des nombres 1·2·4·8 il faut maintenant chercher les interme diaires) que l'on a designes icy par ✳) pour les nombres 3·6·7·:

0 - - - - - - - - - - - - 1
1 - - - - - - - - - - - - 2
✳ - - - - - - - - - - - - 3
2 - - - - - - - - - - - - 4
✳ - - - - - - - - - - - - 5
✳ - - - - - - - - - - - - 6
✳ - - - - - - - - - - - - 7
3 - - - - - - - - - - - - 8

Supposons ferme:
1° dans le cas present on ne peut avoir que des

fractions entre 0 et 1; 1 et 2; 2 et 3 &c nous avons fait voir dans l'article precedent la maniere d'eviter les fractions en se servant de decimals 2° c'est pour cela que les geometres ont exprimé les logarithmes par les fractions decimales et pour assigner plus facilement le logarithme d'un nombre quelquonque ils ont choisis la progression geometrique decuple 1; 10; 100; 1000, &c au lieu de toute autre progression, et dans la progression arithmetique 0. 1. 2. 3. 4. 5 &c ils ont pris 0 0000000, 10000000, 20000000, c'est a dire les memes termes 0, 1; 2; 3; 4) × 10000000

00000000 - - - - - - - - 1
10000000 - - - - - - - - 10
20000000 - - - - - - - - 100
30000000 - - - - - - - - 1000

6eme

on peut par la trouver d'une maniere facile les logarithmes intermediaires, et veritables ou qui ne different des veritables que de 1/100000000 vg entre 1 et 10 il ne se trouve que 8 nombres, 2, 3, 4 &c pour lesquelles il est facile de trouver des logarithmes; dans la progression arithmetique entre 00000000 et 10000000 il se trouve dix

millions de termes parmi lesquelles on peut choisir des logarithmes.

proposition 7eme

deme entre 10 et 100 il ne se trouve que 89 termes en progressions geometriques pour lesquels il faille trouver des logarithmes; mais entre 10000000 et 20000000 il y a 1000000 de termes entre lesquelles on peut prendre des logarithmes

proposition 8eme

on trouve plusieurs livres ou l'on a calculé les tables des logarithmes Mr [illegible]lacq est un des premiers qui est donné de ces tables et plusieurs geometres apres luy ont contribués a les perfectionner

Section onzieme

De la mesure pratique

La mesure pratique à sa difficulté de meme que le calcul pratique; car dans la pratique on ne mesure un solide que par la surface, la surface que par la ligne, la ligne que par le point ou l'angle, ainsi tout se reduit a la mesure de l'angle qui pour cela est appellé mesure fondamentale; or l'angle ne peut estre exactement mesuré que par l'arc circulaire qui

l'intercepte entre les costes, et cette mesure est imparfaite parceque cet arc circulaire ne peut luy mesme estre mesuré non plus que la circumference du cercle, d'ou il suit que cette mesure quoyque bonne relativement n'est pas cependant bonne absolument, la quantité de cet arc nous estant inconnue

2a nous parlerons 1o. de la mesure fondamentale et primordiale, 2o de la maniere d'employer cette mesure, ou des differents arts de la geometrie pratique

Chapitre 1er

~~De la~~ De la mesure fundamentale

nous parlerons 1o de la reduction des angles 2o des mesures et instruments usuels

1o l'angle comme nous venons de le dire ne peut estre exactement mesuré que par l'arc circulaire qu'il intercepte, or cependant un objet etendu n'est censé bien mesuré que lorsqu'il l'est par une droite, parceque cette seule mesure peut nous estre connue et par consequent de quelque utilité. il faudroit donc pouvoir mesurer les angles par des lignes droites 2o or entre toutes les lignes droites il a paru naturel de choisir pour mesure de l'angle la corde

qui luy estoit opposée: cette mesure a pourtant
cet inconvennient, qu'elle n'est pas juste et
respective, car les cordes opposées aux angles,
ne sont point proportionelles a ces angles, vg
la corde d'un angle double n'est pas double
comme nous l'avons vu en geometrie,

3° cependant comme les geometres n'ont jamais
pu trouver parmi les lignes droittes de mesure
plus naturelle des angles que les cordes qui
leur etoient opposées, ils s'en sont servi, et ont
desormais employé pour mesure des angles
leurs cordes, ou plutost les moitiés de leurs cordes
qu'ils ont appellés sinus des angles et n'ont
rien negligé pour rectifier cette mesure et
la rendre exacte

4° c'est pourquoy de mesme que pour rectifier
le calcul pratique, ils ont eu recours a de
grands nombres, en divisant les quantités
en un tres grand nombre de parties, ainsi pour
rectifier la mesure des angles, et trouver dans
leurs sinus la mesure la plus exacte qu'il fut
possible, il ont eu recours aux plus petits angles:
car plus les angles sont petits, plus la raison de leur
cordes approche de celle des angles, parceque plus
les angles sont petits, moins leurs cordes different
des arcs qui mesurent ces angles

50 nous faut donc parler 1o de la theorie des sinus, 2o de la construction des tables des sinus.

paragraphe 1er

6. theorie des sinus

Definitions

1o le sinus de l'arc AC, ou de l'angle AOC fig 4, fab B est la ligne AB perpendiculaire au diametre, ou a un des costes de l'angle: cette ligne AB est la moitie de la corde AD qui soutente un arc double: or ce sinus s'appelle sinus droit, et la ligne BC s'appelle sinus verse du meme arc et d'une angle

2o FCA est le complement de l'angle ACE et la ligne AF s'appelle le sinus de l'angle de complement, ou le co-sinus

3o Le sinus de l'angle droit est le rayon luy meme, et il s'appelle sinus total, en effet le sinus d'un angle n'est rien autre chose qu'une ligne tirée de l'extremité d'un de ses costes perpendiculairement sur l'autre costé, or cette ligne tirée perpendiculairement de l'extremité d'un des costes de l'angle droit ne peut estre qu'un rayon

4o le sinus d'un angle obtus est le meme que le sinus de son angle de supplement.

Corollaire 1er

le rayon du cercle estant donné, lorsqu'on connoit le sinus droit AB d'un angle, il est facile de connoistre le co-sinus AF, parceque dans le triangle AFC rectangle, on connoit l'hypotenouse CA qui est egale au rayon, on connoit de plus le costé FC = AB, et par consequent il est facile de connoistre le 3eme costé AF qui est le co-sinus

Corollaire 2onde

1° il est facile de connoitre le sinus d'un angle de 30 degres, car supposant que le costé AD soit le costé d'un exagone fig 5 tab 6 il sera egal au rayon, et l'angle central ACD sera de 60 degres, or le sinus AB de la moitie de l'angle ACD, ou d'un angle de 30 degres sera la moitie du rayon comme il est evident

2° on connoitra aussi facilement le co-sinus de cette angle de 30 degres, ou le sinus AE de l'angle FCA de 60 degres; car dans le triangle rectangle ECA dans lequel on connoit les costes EC et CA on connoitra facilement le 3eme costé EA

Corollaire 3eme

il est facile aussi de connoitre le sinus d'un angle de 45 degres; car inscrivant un angle de 45 degres

dans un cercle, et supposons que cet angle est A fig 6 tab 6; il est evident 1° qu'il sera sous double de l'angle B C D central, lequel par consequent sera droit, 2° que divisant l'angle au centre par la perpendiculaire D G l'angle G D C sera de 45 degrés et par consequent egal a l'angle inscrit A et la ligne G C est le sinus de l'angle G D C donc il est aussi sinus de l'angle egal A

3° Or ce sinus G C est facile a connoitre parceque dans le triangle rectangle G D C on aura $\overline{DC}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GC}^2$, or $DG = GC$ parceque ils sont opposés a des angles egaux sçavoir chacun de 45 degrés donc $\overline{DC}^2 = 2\overline{GC}^2$; et $\frac{\overline{DC}^2}{2} = \overline{GC}^2$

Corollaire 4eme

par le moyen des triangles rectangles on peut connoitre les sinus des differents angles en suivant la methode cy dessus; connoissant le sinus d'un angle double; connoissant les sinus de deux angles on peut connoitre le sinus de la somme de ces angles, et cela, comme nous venons de le dire en faisant toujours usage des triangles rectangles.

Definition

1° La ligne C H fig 4 tab 6 qui partant du centre passe par une extremité de l'arc A [illegible]

extremité duquel passe le rayon C B s'appelle secante de l'arc A L, et de l'angle A C L

2° La ligne H L tiré de l'extremité de la secante perpendiculairement sur l'extremité du rayon s'appelle la tangeante de ce meme arc, et de ce meme angle

3° or les secantes et les tangeantes des angles, aussi bien que leurs sinus servent a mesurer les angles, et les geometres s'en servent aussi fort souvent pour determiner la quantité des angles, mais absolument parlant la connoissance des seuls sinus suffit pour la mesure des angles

paragraphe 2ond

De la construction des tables des sinus.

premiere

Les tables des sinus se forment a peu pres de la meme maniere que les tables des Logarithmes c'est pourquoy les geometres dans la construction des tables des sinus supposent ordinairement le rayon divisé en ~~mille~~ dix 10000000 de parties dont les sinus contiennent un certain nombre plus ou moins, selon qu'ils sont plus grands ou plus petits

p. 2onde

L'usage des tables des sinus est que connoissant.

dans le calcul des triangles un sinus ou un angle
on puisse trouver l'angle ou le sinus correspondant.
c'est pour cela que dans ces sortes de tables on trouve
les sinus de tous les angles depuis un degré jusqu'
a 90; quand on fait entrer dans le calcul, les degrés
et les minutes, on peut negliger les 2ondes parce
que le sinus d'un angle d'une 2onde differe tres peu
de son arc

proon 3eme

voicy comme on construit ces sortes de tables par
le moyen du rayon ou du sinus total on connoit
1° Le sinus de l'angle de 30 degrés, 2° le sinus d'un
angle de 60 degrés double du 1er. 3° Le sinus
de l'angle de 120 degrés par la meme raison.
4° on connoit de meme le sinus de l'angle de 15
degrés, et le sinus de l'angle de $7\frac{1}{2}$ ou $7^{0}+30^{I}$

proon 4eme

connoissant de meme le sinus d'un angle de 45
degrés, on connoit 1° le sinus et le co-sinus de
l'angle de $22^{0}+30^{I}$ 2° le sinus de l'angle
egal aux deux pris ensemble 3° le sinus des
autres angles qui sont des $\frac{1}{2}$ des $\frac{1}{4}$ parties de l'a
ngle connu   proon 5eme.
dans la construction de ces sortes de tables l'ess-

apropos de chercher le sinus de l'angle d'une minute et on poura par ce moyen trouver seulement les sinus des angles de 2 et 3 &c. en se servant d'une regle de trois car comme ces sinus ne different point de leurs arcs a cause de leurs extremes [illegible], ils sont entre eux comme ces arcs.

pprouv 6eme

dans les tables imprimes que nous ont donnes differents geometres on trouve les angles calcules non seulement par leur sinus, mais encore par leur secante et tangeante ces sortes de tables se construisent a peu pres de la meme facon que celle des sinus

article 2 ond

Des mesures et instruments usuels.

1° ces instruments sont contenus du moins pour la plus part dans l'etui de mathematiques: on se sert ~~de~~ ces instruments pour mesurer les angles et les lignes; et de la on parvient a la mesure des triangles ce qui s'appelle trigonometrie, et qui est la fin de ces sortes

d'instruments

2° nous allons donner 1° la description et l'usage des instruments de mathematiques 2° la fin des instruments de mathematiques ou les principes de la trigonometrie.

paragraphe 1er

Description et usage des instruments de mathematiques

Moon Lere

ces instruments sont 1° un compas dont on se sert pour decrire des cercles, et mesurer les distances 2° une regle dont on se sert pour tirer des lignes ou pour continuer une ligne commencée. 3° une double regle comme l'appellent les geometres dont on se sert pour tirer des lignes paralelles. 4° un demi cercle, ou un quart de cercle gradué par minutes et degres, dont on se sert pour mesurer les angles. 5° une equerre dont on se sert pour tirer des lignes perpendiculaires. 6° un plomb dont on se sert pour determiner les lignes verticales. 7° un pied de roy divisé en 12 pouces et chaque pouce divisé en 12 lignes dont on se sert pour mesurer les longeurs.

pproon 2onde

detouslesinstruments demathematiques leplus celebre est celuy qu'onappellelecompas deproportion dont voicy ladescription

1° le compas deproportion representé parlafig 9 MAN tab 6; estun veritable compas, parce quilest composé de deuxreygles mobiles autour d'une charnier Lesquelles amesureque elles s'ecartent l'une de l'autre forment des angles plus ou moins grands.

2° ilest compas deproportion parceque par son moyen onpeut trouver deslignes proportionelles adeslignes donnes

3° lesbranches dececompas sont graduées, affin que par lemoyen deses degres onpuisse conter les parties deslignes semblables quisont donnes, ou quelon cherche. pproon 3eme

l'usage du compas deproportion consiste

1° atrouver deslignes pportionelles ades lignes donnes, vg silon cherche une 4emeligne pportionelle a 3 autres lignes donnes quisoyent vg AB, AC, AD, ilny qu'aprendre surles branches du compas deproportion des portions AB, AC, AD, fig 9 tab 6 egale aux

trois lignes donnes et tirer la ligne B C par les extremites B C, alors tirant de l'extremite D la ligne D O paralelle a B C, on aura la ligne A O proportionelle aux trois autres, car a cause des triangles semblables A B C, A D O il est clair qu'on a la proportion A B est a A D :: A C . A O

2° le compas de proportion sert a trouver les cordes des arcs, et par la sert a trouver les sinus des angles puisqu'il est vray que la moitie de la corde d'un arc quelconque, est le sinus d'un angle mesuré par la moitie de cette arc.

~~3° Le compas de proportion [illegible]~~
3° Le compas de proportion ~~[illegible]~~, a encore plusieurs autres usages qui sont detailles et expliques chez la plupart des geometres et dont nous pouvons icy nous passer

paragraphe 2ieme

Fin des instruments De mathematiques ou principes de trigonometrie

1° la fin des instruments de mathematiques est de mesurer les angles et les lignes ainsy par leur moyen il est aisé de mesurer les

2° mais toute figure, toute surface est reductible a un triangle, comme nous l'avons dit; ainsi tout l'art de mesurer les surfaces se reduit a celuy de mesurer le triangle
3° l'art de mesurer les angles et les costes du triangle s'appelle trigonometrie:

il y a deux sortes de trigonometrie l'une qu'on appelle naturelle, et qui est toute fondée sur la similitudes des triangles, l'autre qu'on appelle scavante et qui est fondée sur la theorie des sinus tangentes et secantes nous allons exposer les principes de l'une et de l'autre nombre ver.

principes de la trigonometrie naturelle

un triangle est tout a fait connu, des lors qu'on connoit ou les trois costes; ou deux de ses costes et l'angle compris entre ses costes; ou deux de ses angles et le costé compris; ou meme deux des ses costes et un angle opposé a l'un des deux costes connus pour vu qu'on connoisse l'espece de l'angle opposé a l'autre costes: ors on mesure les angles

du triangle par le moyen des quarts du cercle gradué et on mesure ses costes par le moyen soit du pied, soit de la toise, soit de

problème

connoitre en entier un triangle quelconque vg. ABC fig 13 tab2 dans lequel on connoit deja un angle A, et les deux costes AB, AC, qui comprenent cet angle

Solution il n'y qu'a construire un triangle moindre mais semblable au grand

1° en faisant un angle egal al'angle connu du grand triangle;

2° en faisant autour de cet angle deux costes proportionels aux costes qui comprent l'angle homologue dans le grand triangle, c'est a dire en faisant dans le petit triangle les costes vg de 100, 50, &c pouces, lignes, & supposé que les costes connus du grand triangle, soit de 100, 50, toises, pieds &c

3° cela posé si dans le petit triangle on forme un troisieme costé, ce petit triangle deviendra parfaitement semblable au grand triangle et servira a le faire connoitre.

4° car si dans le grand triangle ABC on vouloit connoitre le 3eme costé BC, il n'y auroit

qu'a mesurer le costé homologue du petit triangle
et en supposent qu'il contint 20 poulces on
signes, ou &, on concluroit que le 3eme costé
du grand contient 20 toises ou pieds ou & pa
reillement si lon vouloit connoitre dans le gr
and triangle les angles inconnus il ny auroit
qu'a mesurer les angles homologues du petit
triangle, lesquels etant egaux a ceux du grand
les feront connoitre
Jo en suivant la meme methode on pourroit
mesurer La surface du grand triangle sça
voir en mesurant la surface du petit triangle
semblable laquelle est egale au produit de sa
base par la moitie de sa hauteur

voir fig. 2eme

principes de la trigonometrie sçavante
La trigonometrie dont nous venons de parler,
et qu'on appelle naturelle, est suffisante et meme
geometrique; parceque elle est toute fondeé sur
un principe geometrique sçavoir la similitude
des triangles: La trigonometrie sçavante dont
nous allons parler consiste a decouvrir les parties
inconnus du triangle sçavoir ou les costes ou les an
gles par le moyen des sinus, des tangeantes, et
des secantes

principe

Les sinus des angles sont proportionels aux costes opposés

aux angles

preuve car les moitiés sont proportionelles autant/ or les sinus des angles sont les moitiés des costés opposés aux angles; car si lon inscrit vyle triangle ABC fig 6 tab 6 dans un cercle il est clair que l'angle inscrit A est sous double de l'angle central BDC et que par consequent il est egal a l'angle GDC moitie de l'angle central qui a pour sinus la ligne GC, donc cette ligne GC, est aussi sinus de l'angle inscrit A; or le sinus GC est la moitie du costé BC parceque la perpendiculaire DG divise en deux parties egales et l'angle central et la corde BC et l'arc soustendu par la corde dont

Corollaire

1° d'ou il s'ensuit que par le moyen des sinus on peut connoitre les costés opposés aux angles; et reciproquement par le moyen des costés opposés aux angles, on peut connoitre les sinus des angles

2° et par consequent par le moyen des angles on peut connoitre les costés qui leurs sont opposés et reciproquement par le moyen des costés opposés aux angles on peut connoitre les angles eux memes.

3° et par consequent que lon peut connoitre

tous les angles, et tous les costes d'un triangle
toutes les fois que l'on y connoit ou qu'on y peut
facilement connoitre ou deux angles et le
costé intercepté ou deux costes et l'angle
compris, ou les trois costes,

Theoreme 1er

dans tout triangle rectangle on a toujours cette
proportion, comme le rayon ou sinus totale
est a l'hypotheneuse, ainsy le sinus d'un des
angles aigus est au costé opposé

preuve selon le principe cy dessus les sinus
des angles sont proportionels aux costes opposes a
ces angles, donc le sinus de l'angle droit (scavoir
le rayon) est l'hypotheneuse costé opposé a l'a
ngle droit, comme le sinus de l'angle aigu
est au coste a cet angle aigu

Theoreme 2eme

dans tout triangle rectangle on a toujours cette
proportion comme le rayon est a un costé, ainsy la
tangeante de l'angle opposé a l'autre costé
est a ce coste

preuve La preuve suit evidemment du prin
cipe, comme on le peut voir dans le tria
gle CBH où le rayon CH est le sinus
de l'angle droit, et la tangeante HB est
le sinus de l'angle C, or les sinus sont

pportionelles aux costes donés

Theoreme 3eme

en tout triangle obliquiangle ABC si du plus grand angle B on mene au costé opposé AC la perpendiculaire BL, on aura cette proportion: comme le plus grand costé AC est a la somme des deux autres costes ainsy la difference de ces memes costes est a la difference des segments CL, LA, du plus grand costé

preuve si du centre B, et de l'intervalle du plus petit costé BC on decrit un cercle GCDH, et si on prolonge AB en G; il est clair que AG sera egal à la somme des costes AB, BC, et que AH sera leur difference: pareillement CL = LD comme nous avons vu cy dessus et par consequent AD est la

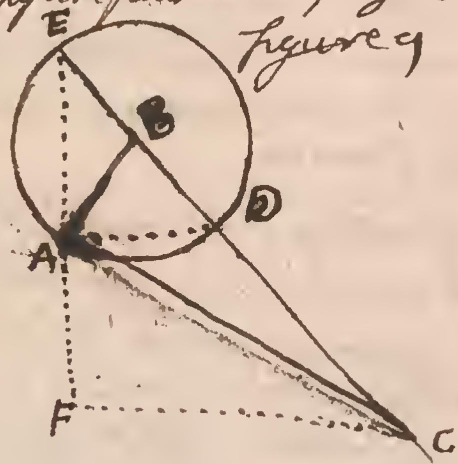
comme l'espace etoit trop petite pour contenir la figure elle se trouve faite a la page 212 figure 8

difference des segments CL, LA, or AC. AL :: AH. AD puisque les parties exterieures de deux secantes sont reciproquement proportionnelles aux secantes entieres, donc &c.

theoreme 9eme

dans tout obtuzangle la somme de deux costes, est a leur difference, comme la tangente de la moitie de la somme de deux angles opposes a ses costes, est a la tangeante de la moitie de la difference de ces deux memes angles

on trouvera la meme figure plus claire page 212 figure 9



preuve du point B comme centre et de l intervalle du petit costé BA decrivez un cercle LAD; menez la droitte DA et CF paralelle a DA jusqu'en F laquelle sera perpendiculaire aux lignes CF, DA; parceque l angle LAD est droit au point A, &c

1° CL sera la somme des costes BA, BC, et DC sera leur difference

2° l angle B setant exterieur au triangle ABC, sera la somme des deux angles BAC, BCA opposes

aux deux costes, BA, BC; et l'angle FCL ou son egal ADL sera la moitie de leur somme ABL parceque ces deux angles estant appuyes sur un meme arc l'un est a la circumference et l'autre au centre

3° l'angle ACF sera la moitie de difference des memes angles BAC, BCA, ou des deux angles BAC, BCA le plus grand est l'angle BAC, ors l'angle BAC = BAD + DAC et BAD = B DA qui est la moitie de la somme, donc DAC ou son egal ACF est la moitie de la difference; car de deux quantites inegales la plus grande, comme nous avons dit cy devant est egale a la moitie de la somme plus la moitie de la differen ce, donc &c.

4° parceque l'angle [illegible] F est droit, si on prend C F pour rayon ayant decrit un cercle du point C comme centre, FL sera la tangeante de FCL qui est la moitie de la somme des angles en question; et FA sera la tangeante de l'angle FCA qui est la moitie de la difference des memes angles; ors a cause des triangles semblables LFC, LAD, on aura la proportion LC-DC :: LF LA, dont le 1er terme est la somme des costes BC, BA; le 2ond est leur di fference, le 3eme est &c.

Des arts de la geometrie pratique

La geometrie pratique renferme differents arts qui sont surtout 1o la longimetrie ou la mesure des lignes 2o la trigonometrie ou le calcul des triangles 3o la planimetrie ou la mesure des plans et des surfaces 4o la stereometrie ou la mesure des solides 5o la siclometrie ou la mesure du cercle et des corps circulaires ~~artic~~

article 1er

La Longimetrie

probleme 1er

tirer une ligne perpendiculaire a une ligne donné AB fig 8 tab 1er

Solution des points A et B il faut decrire a vec la meme ouverture du compas des arcs de cercle qui se coupent au point C et L des points d'intersection C et L on mene la droite CL ou CD elle sera perpendiculaire puis qu'elle sera egalement distante dans tous les points, de A et de B

probleme 2cond

faire un angle egal a un angle donne

BAC fig 7 tab 6

Solution 1o de lextremite A du compas decrivez larc BC ensuite de lextremite a de la ligne acZ, decrivez larc indefini d b c 2o si sur larc d b c vous prenez avec le compas la portion bc = BC, et que vous joygnez en tirant une ligne droitte les points a et b, vous aurez langle bac = BAC on peut par cette meme methode faire un triangle egal au triangle donné

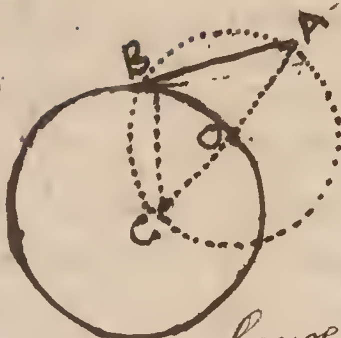
probleme 3eme

faire passer une circumference par 3 points donnez fig 6 tab 6

Solution menez des lignes droittes d'un point a lautre pour en former un triangle divisez par la moitie 2 ou 3 costes du triangle par le moyen des perpendiculaires qui etant prolongez aboutiront a un meme point D qui sera le point central de la circumference cherchee Corollaire

D'ou il suit 1o qu'un arc de cercle peut se continuer, pourveu qu'on trouve son centre 2o qu'on peut trouver le centre d'un arc ou d'un cercle donné quelconque

Decrire un poligone regulier ou irregulier
Solution connoissant les angles autour du
centre du polygone, faittes des angles autour
d'un centre commun, si de ce centre vous menez
des lignes egales ou inegales, et que vous les
joignez par les extremites, vous aurez le poly
gone cherché
probleme 5eme
mener une parallelle a une autre ligne
Solution sur la ligne donné elevez 2 perpendi
culaires egales, et joignez leurs extremites par
une lignes droitte, cette ligne sera parallelle
a la 1ere
probleme 6eme
D'un point donné dans la circumference tirer
une tangente
Solution tirez un rayon a ce point de la circumferen
ce ensuitte elevez sur l'extremité du rayon une per
pendiculaire, elle sera tangente, comme il a eté
prouvé cy devant probleme 7eme
d'un point donné hors de la circumference tirer une
tangente
Solution tiré de ce point au centre du cercle
une ligne droitte vg AC coupé cette ligne
par le milieu que je suppose entre le point o



apres quoy du point O comme centre, et de l'intervalle OA decrives une circumference, elle coupera la sfere en deux points: si du point A on tire une ligne a un de ces points d'intersection elle sera tangente au cercle donné

page 212 figure 10

la meme se trouve

preuve La raison en est, que si on tire le rayon CB, on aura l'angle ABC appuyé sur le diametre du cercle qu'on vient de decrire, donc cet angle est droit, donc la ligne AB est perpendiculaire sur l'extremité du rayon; donc elle est tangente

probleme 8eme

trouver une ligne ou plusieurs lignes proportionelles a des lignes donnes

solution on peut les trouver par la pag. tab. 6. en se servant des triangle semblables ou du compas de proportion

probleme 9eme

trouver une ligne moyenne proportionelle

solution joygnes les deux lygnes donnes en une seule qui devienne le diametre d'un cercle, menes du point d'union une perpendiculaire qui aille se terminer a la circumference, cette perpendiculaire sera la moyenne proportionelle cherché

problème 10eme

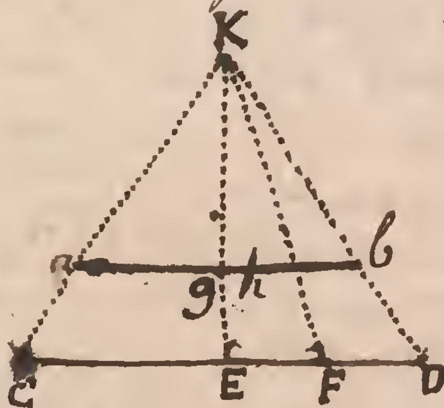
Deux lygnes etant donnes A B une 3eme proportionelle, que nous nommerons D, ensorte qu'on ait la proportion A. B :: B. D

Solution ce probleme se resoud de la meme maniere que le 8eme avec cette difference que la 2eme lygne AC de la fig 9 doit estre egale a la 2nde B D, et alors la lygne C D sera la 3eme proportionelle cherchée.

problème 11eme

diviser une lygne donné en des parties semblables ou proportionelles a celle d'une autre lygne donné

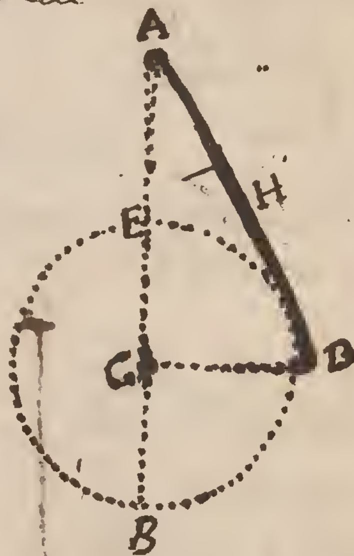
Solution soit la lygne CD divisé en trois parties, soit aussi la lygne AB qu'il faut diviser en parties



semblables acelles de D C, tires la ligne a b = AB et paralelle a CD, ensuite par les extremites des lignes tires deux lignes qui iront aboutir au point commun K, enfin du point K menes les lignes droittes K l, K f au point de division de la ligne donné CD elles couperont la paralelle en partes semblables acelles de la ligne donnée CD, ce qui se prouve par la similitude des 3 angles K C l, K a g &

probleme 12eme

couper une ligne BD en moyenne et extreme raison c'est a dire la diviser en deux partes telles que la plus grande soit moyenne pportionelle entre la toute et l'autre parte



Solution sur une extremité de la ligne donné BD eleves la perpendiculaire CD egale a la moitie de la ligne BD ensuite du point C comme centre decrives une circumference, et de l'extremité B tires la secante BA qui passe par le centre: prenes BG = BL je dis que la ligne BD sera coupeé en moyenne et extreme raison au point G; cest a dire qu'on aura BD..

preuve pour demontrer cette proportion, il faut remarquer 1° que la ligne BD est une tangente 2° que la secante BA passant par le centre, la partie interieure CA est un diametre et par consequent double du rayon CD; ors par la construction La tangente BD est aussi double de CD, donc le diametre CA = BD ors a cause de la tangente BD on a BA . BD :: comme BD . BC donc substrahendo BA − BD . BD :: BD − BC . BC ors BA − BD = BC = BG; de meme BD − BC = GD: donc BG . BD :: GD . BG, et invertendo BD . BG :: BG . GD

article 2ond

La trigonometrie.

La trigonometrie est l'art de connoitre Les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui sont connues: pour resoudre le triangle, il faut en connoitre deja trois parties, et par le moyen de la regle de trois, on vient a bout de connoitre la partie inconnue, parce que celle cy se trouve le 4eme terme d'une proportion dont on connoit les trois pers termes: nous allons appliquer

Les principes trigonometriques que nous avons donnes cy devant a quelques exemples qui feront voir la maniere de reduire cet art en pratique

probleme 1er

mesurer la longeur d'une ligne accessible, vg mesurer la hauteur d'une tour

Solutiō on supposons qu'il faille mesurer la ligne AB fig 1 tab 2 dont le point B soit accessible, par le moyen d'un quart de cercle mesures l'angle C, mesures ensuitte la base CB, connoissant d'ailleurs l'angle B qui est droit, vous connoisses par consequent dans le triangle ABC trois choses qui vous conduirent a la connoissance du coste BC

probleme 2ond

mesures la longeur d'une ligne inaccessible

Solution s'il s'agit de mesurer la hauteur ef fig 2 tab 2 dont le point f est suppose inaccessible et qu'il faille commencer au point n, mesures la partie m n de la ligne n f et par le moyen du quart de cercle connoissant les angles m e n, vous connoittres le coste m e; d'ou il suit que si vous mesures par le quart de cercle l'angle e m f, vous

connoistres trois choses dans le triangle emf, sçavoir l'angle f qui est droit, l'angle m que vous aves mesures, et le costé em, ce qui donnera le costé cherché ef

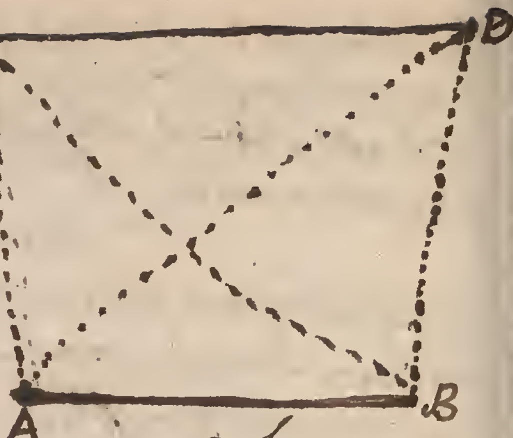
Corollaire 1er

il suit de ce que nous venons de dire, qu'on peut facilement mesurer la hauteur d'une montagne la largeur d'un fleuve la distance des lieux sur la terre, la distance meme de la lune a la terre et la grandeur de la terre &c en supposant quelques principes d'astronomie dont nous parlerons dans la optrique particuliere

Corollaire 2ond

1° ces principes sont la base et le fondement de l'ignographie dont le but est de placer sur des tableaux des distances des lieux, des villes, des montagnes, des fleuves &c par le moyen des triangles:
2° c'est aussi sur ces principes qu'est fondée la peinture dont l'art consiste a former des lineaments proportionels, des angles egaux, des lignes egalement courbes, &c probleme 3eme:
trouver la distance de deux objets inaccessibles,

254
de ligne C et D.



page 212 La meme figure plus precise figure 11

Soyvenes deux stations comme A B desquelles on puisse apercevoir les 2 objets et mesurer l'intervalle de ces stations ensuitte du point A mesurer l'angle D A B, et l'angle C A B formes tous les deux par des rayons visuelles: du point B mesures aussi les angles C B A et D B A.

c'est pourquoy dans le triangle D B A on connoit deux angles et le costé A B, donc on trouvera aisement par les principes cy devant le costé B D; de meme dans le triangle A C B, on connoitra deux angles et le coste A B; par consequent on trouvera aisement le costé C B; donc si l'on mesure l'angle compris C B D, il sera aisé de resoudre le triangle C B D dans lequel on connoit 2 costés et l'angle compris, donc on connoitra aisement le coste C D, ou la distance des deux objets:

Corollaire: –

1° il est aisé d'appercevoir que par la meme methode on pourroit determiner la distance de 3, 4, 5, 10, 100, &c objets; en un mot de tous ceux qu'on pourroit appercevoir des deux points de station AB; si on vouloit meme determiner la distance de quelques objets qu'on ne pourroit pas appercevoir des deux points AB, il n'y auroit qu'a changer de points de station, et prendre pour ligne de station le costé connu de quelqu'uns des triangles qui seroient deja resolus

2° c'est la methode dont on se sert pour lever la carte geographique d'un pais; car ayant fait une echelle divisée en parties egales on determine la distance des lieux sur la carte en prenant dans l'echelle autant de parties egales qu'il on trouve soit de toises, soit de perches, soit de lieux dans les costes des triangles

Article 3eme

La planimetrie

probleme 1er

mesurer les surfaces planes, triangulaires, rectangles, quarres, poligones &c

Solution puisque toute surface resulte du produit

du produit de deux lignes qui sont les racines, les facteurs par raport a la surface, il est clair que connoissant ces facteurs et les multipliant l'un par l'autre, on aura la surface, 2° en multipliant la hauteur par la base, on aura un parallelograme, multipliant la hauteur par la moitie de la base, on aura un triangle &

problemme 2ᵉᵐᵉ

mesurer la surface des terres

solution 1° Lorsque la surface que lon veut mesurer est plane, et n'a nulle irregularites, l'operation n'a nulle difficulte car cette surface est ou triangulaire, ou quarrée, ou &c ors dans chacun des ces cas, on voit comme il faut s'y prendre apres ce qui a este dit dans la geometrie speculative

2° Si la surface que lon veut mesurer a des irregularites, il faut les rectifier en tirant des lignes droittes, et tout compenser autant qu'il se peut

3° l'art de mesurer la surface des terres, s'appelle arpentage

problemme 3ᵉᵐᵉ

mesurer une surface de terre qui est oblique

Solution 1° comme une surface oblique a double dimension, l'une horizontale et l'autre perpendiculaire, il faut mesurer seulement la surface entant qu'elle est horizontale, car la valeur

des terres ne s'estime que selon leur surfaces horisontales, parceque les arbres, les bleds, les herbes &c ne croissent que selon leur direction ou ventre a la circonference, ou perpendiculairement, et par consequent l'excés de surface que donne l'obliquité ne contribue en rien a la richesse des terres

2° la surface oblique doit donc se mesurer, en tirant par le moyen du nivellement des lignes horisontales A B, D C, E F fig 10 tab. 8 dont la somme est egale a la base I K et donne la surface horisontale

article 4eme

La stereometrie

Probleme 1er

mesurer la solidité des corps rectilignes

S. si le corps est rectiligne, savoir pyramidal, cubique, ou &c il sera facile de le mesurer en multipliant ses trois dimensions l'une par l'autre, selon ce qui a eté dit dans la geometrie speculative; l'art de mesurer la solidité s'appelle le toisé

probleme 2eme

mesurer la solidité des corps curvilignes

S on ne peut mesurer exactement la solidité des corps curvilignes, comme nous l'avons dit,

mens on peut approcher seulement et de si pres que l'on veut, de leur mesure exacte; c'est pourquoy

1o s'il s'agit de mesurer la solidité d'une voute il faut la diviser par la pensée en plusieurs parties qui soyent ou des prismes ou des pyramides, ou &. et mesurer la solidité de chacune de ces parties

2o s'il s'agit de mesurer la capacité vg d'un tonneau (ce qui s'appelle jaugeage) il faut regarder le tonneau comme un prisme dont la hauteur est la hauteur du tonneau, la profondeur est la meme que celle du tonneau, et la largeur est une largeur moyenne entre la plus grande et la plus petite largeur du tonneau: on peut aussy regarder le tonneau comme un corps composé de deux cones tronqués et joints l'un a l'autre par la base, et prendre la mesure de chacun de ces cones.

3o en general lorsqu'il s'agit de mesurer soit les surfaces, soit les solides curvilignes, il faut dans la pratique et l'usage, recourir a differents expedients pour reduire les surfaces et les solides curvilignes, a des surfaces, et des

solides rectilignes, parcequ'il ny a que tres peu de courbes qui puissent estre mesurées exactement, et les autres ne peuvent l'estre qu'a peu pres et par approximation

article 5eme
La sidometrie
proposition 1ere

La cyclometrie est l'art de mesurer La circumference du cercle, sa superficie, et la solidité des corps circulaires.

proposition 2onde

Si l'on inscrit ou qu'on circonscrive au cercle 1° un quarré, 2° un octogone, 3° &c. ces circumferences approcheront toujours de plus en plus de la circumference du cercle, mais ne se confondront cependant jamais avec celle, a moins que le nombre des costes inscrits ou des circumscrits ne soit infini

proposition 3eme

1° Si l'on inscrit au cercle un polygone de 96 costes La difference entre la circumference du polygone et celle du cercle est tellement insensible, qu'archimede me mesme l'a consideré

lecercle que comme un polygone de 96 cotés
2° d'ou l'a conclu que le rapport de la circum
ference au diametre etoit a peu pres celuy
de 22 a 7, ou de 3 a 1
3° cela posé on aura la mesure de la circum
ference du cercle en triplant le diametre,
et la surface du cercle sera egale a celle d'un
triangle qui auroit pour hauteur le rayon
du cercle et pour base une ligne triple du dia
metre du meme cercle

Corollaire

d'ou l'on suit qu'on peut facilement mesurer
les surfaces et les solidités des corps circulair
spheriques, cylendriques

2ond traitté

De la geometrie composé

La geometrie composée de meme que la sim
ple a 3 parties, scavoir le calcul, la theorie
et la pratique

Livre 1er

Le calcul de la geometrie composée

1° le calcul de la geometrie composée est plus
relevé que celuy de la geometrie simple

celuy cy a pour objet les quantités simples, leur raison, leur proportion et leur aequation; mais celuy la a pour objet Les puissances et les racines des quantités complexes leur raport, leurs combinaison, leur progression, et leur aequation de differents degrés
2o ce calcul s'appelle art analytique, ou analyse pratique parceequ'il procede par voye d'analyse, et de composition: nous allons exposer 1o l'analyse des puissances et des racines des quantités complexes 2o l'analyse des progressions

Section 1ere

analyse

Des puissances et des racines

nous allons parler 1o de la formation des puissances, 2o de l'extraction des racines

Chapitre 1er

De la formation des puissances

nous allons exposer ce qui regarde la formation des puissances, le nombre de termes de chaque puissance, leur reduction, leur exposant, leur coefficient.

Regle 1ere

on eleve une quantité vg $a+b$ a une puissance

en la multipliant par elle meme un certain nombre de fois comme on le va voir

1° La quantité $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^2 + 2ab + b^2$, et c'est la 2onde puissance ou le quarré de la quantité $a+b$

2° si on multiplie le quarré $a^2+2ab+b^2$ par $a+b$, on aura $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, et c'est la 3eme puissance ou le cube de la quantité $a+b$

3° si on multiplie le cube a^3+3a^2b+ &c par $a+b$, on aura a^4+4a^3b+ &c, et c'est la 4eme puissance ou le quarré quarré de $a+b$; on auroit pareillement la 5eme la 6eme la 7eme &c puissance de $a+b$

4° par la meme methode on peut avoir soit le quarré, soit le cube, soit &c de la quantité $a-b$; il y auroit cette difference que dans une puissance quelconque de $a-b$, le signe $-$ affecteroit tous les termes ou la quantité b se trouveroit elevé a une puissance d'un degré impair car $- \times - \times - = -$

5° en suivant la meme methode on peut avoir les differentes puissances de la quantité $a+b+c$; ou de la quantité $a+b+c+d$ &c ou de la

quantité $a-b+c$, ou $a+b-c$, et ainsy du reste

Corollaire

1° tout produit consideré numeriquement a autant de termes qu'il y a de facteurs, ou racines, ou multiplicateurs vy le produit $aa+ab+ab+bb$ fait de $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$ contient 4 termes, car 2 termes multipliez par 2 termes ou $2 \times 2 = 4$: de mesme le cube de la quantité $a+b$, contient 8 termes $2 \times 2 \times 2 = 8$ ou $4 \times 2 = 8$

2° mais tout produit consideré analytiquement vy le quarré de la quantité $a+b$, ne contient que trois termes; son cube n'a que 4 termes; sa 4eme puissance, cinq; et ainsy du reste: en general une puissance a autant de termes et un de plus, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; la raison en est que dans la 2onde puissance qui a 4 termes, il y en a 2 de semblables qui se reduisent a un; ce qui de 4 termes ne fait que trois; dans la 3eme puissance qui a 8 termes, il y en a 5 de semblables qui se reduisent a un, ce qui de 8 termes n'en fait plus que 4 et ainsi du reste

3° la raison de cette reduction est que deux

termes semblables vg $ab + ab$, a cause de leur similitude et homogeneité, suivent la condition des nombres que leur homogeneité rend propres a estre unis et ajoutés ensemble, et par cette raison le terme $2ab$ est un seul terme analytiquement et algebriquement, quoi qu'il soit double numeriquement parlant au lieu que les deux termes vg $aa + ab$ sont differents algebriquement, et ne peuvent estre unis et ajoutés pour faire un mesme terme

Regle 2onde

1° La racine $a + b$ est la 1ere puissance, ou le produit de la racine par l'unité, cette 1ere puissance est representée par $a^1 + b^1$, elle peut aussy estre representée par $a^1 b^0 + a^0 b^1$.

2° la 2onde puissance ou le quarré est $a^2 + 2ab + b^2$, et peut aussi se representer par $a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + a^0 b^2$, ou il faut remarquer que l'exposant 2 de a qui exprime le degré diminue jusqu'au dernier terme ou il est a^0, et que b^0 augmente tout au contraire jusqu'a devenir b^2 de sorte que les 2 facteurs $\underline{a}$, $\underline{b}$, se contrebalencent par des accroissements et decroissements contraires

3° la 3eme puissance ou le cube de $a + b$ est $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, et peut se representer

par $a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^3 + a^0 b^3$, ou il faut remarquer la meme chose que cy dessus.

4° il est evident par ce qui vient d'estre dit que la dixieme puissance de $a+b$ est $a^{10} b^0 + a^9 b^1 + a^8 b^2 + a^7 b^3 + a^6 b^4 + a^5 b^5 + a^4 b^6$ &c; il faut raisonner de la meme façon pour trouver une puissance quelquonque qui se formera toujours selon la meme methode

Corollaire

D'ou il suit que si l'exposant de la puissance est indeterminé, et si il est par ex. representé par n, on aura une formule generale pour representer toutes sortes de puissances, sçavoir $a^n b^0 + a^{n-1} b^1 + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + a^{n-4} b^4$ &c et ainsy a l'infini, si l'on suppose que n soit une quantité infinie

Regle 3eme

1° comme les lettres sont la partie algebrique des termes, de meme les coefficients sont leurs parties numeriques: or la quantité $a+b$ peut s'ecrire $1a+1b$ et comme la partie algebrique de ce terme est a^1+b^1, de meme sa partie numerique est $1+1$, et ce sont la les coefficients de la 1ere puissance

2° dans la 2onde puissance ou le quarré les coefficients sont 1+2+1, dans la 3eme puissan ce les coefficients sont 1+3+3+1, les coefficients de la 4eme puissance sont 1+4+&c

3° en general on trouvera les coefficients d'une puiss ance quelconque par l'addition des coefficients de la puissance subalterne de cette maniere

1ere ------- 1+1 ------- 1 . 1

2onde ---- 1+2+1

3eme ------ 1+3+3+1

4eme ------- 1+4+6+4+1

5eme ------- 1+5+10+10+5+1

6eme ------- 1+6+15 &c

dans la 2onde puissance le 1er coefficient 1 est le meme que le 1er coefficient au dessus qui est aussi 1; on forme le 2ond coefficient 2 ajoutant 1 qui est au dessus avec 1 qui precede vers la gau che; enfin on forme le 3eme coefficient ajoutant le 0 qui est censé estre au dessus avec 1 qui prec cede vers la gauche

dans la 3eme puissance le 1er coefficient 1 est le meme que le 1er coefficient superieur le 2ond coefficient 3 se forme ajoutant le 2 qui est au

dessus avec 1 qui precede vers la gauche; le 3eme coefficient 3; se forme en ajoutant 1 qui est au dessus avec 2 qui precede immediatement, le 4eme coefficient 1 se forme ajoutant zero qui est censé estre au dessus avec 1 qui est immediatement a costé.

4° Les coefficients de toutes les puissances se forment de la meme maniere, comme on le peut voir dans la table cy dessus, que lon peut continuer tant qu'on voudra

Chapitre 2ond

De l'extraction des racines complexes

regle 1ere

extraire la racine quelquonque d'une puissance algebrique de meme degré que celle dont on veut extraire la racine, a la 2onde puissance si on veut extraire la racine quarreé, a la 3eme puissance si on veut extraire la racine cubique, a la 4eme puissance si on veut &c; les puissances de ce binôme $a+b$ qui sont; pour la 2onde, $a^2+2ab+b^2$; pour la 3eme $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; pour la 4eme a^4+4a^3

$b+d$ serviront de formule, et indiqueront les divíseurs dont il faudra se servir pour trouver chacun des termes qui doivent composer la racine: c'est de l'attention faite a ces formules (dont on connoit les racines) d'où tout depend, et nous en allons deduire les regles suivantes

1° pour trouver le 1er terme on tirera la racine proposée du 1er terme du dividande qui est la puissance donnée: la racine quarrée, si il s'agit d'extraire la racine quarré; la racine cubique s'il s'agit d'extraire la racine cubique; La racine 4erne &c. et l'on trouvera par la le 1er terme de la racine qu'il faudra ecrire au quotient. en effet pour trouver le 1er terme de la racine du quarrée $a^2+2ab+bb$, il est clair qu'il faut extraire la racine quarreé du 1er terme a^2, pareillement pour trouver le 1er terme de la racine du cube $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, il est evident qu'il faut extraire la racine cubique du 1er terme a^3

2° pour trouver le 2ond terme de la racine, il faudra 1° elever le terme trouvé pour le quotient a la puissance, et la retrancher de la puissance proposée, et qui est le dividande sur lequel on opere 2° il faudra diviser le 2ond terme du dividande par

l'exposant de la racine, et 3° le diviser encore par le quotient deja trouvé mais elevé a la puissance d'un degré au dessous de celle sur laquelle vous operez; c'est a dire il faut diviser le 2ond terme du dividende par l'exposant 2 si on cherche la racine quarrée, par l'exposant 3, si on cherche la racine cubique; et de plus il faut encore diviser ce 2ond terme par la 1ere puissance du quotient trouvé, si on cherche la racine d'un quarrée, par la 2onde puissance du quotient, si on cherche la racine d'un cube, par la 3eme puissance du quotient si &c

en effet dans le quarrée $a^2+2ab+bb$, apres avoir trouvé le 1er terme a, il est clair que pour trouver le 2ond terme que nous scavons estre b, il n'y a qu'a diviser le 2ond terme $2ab$ du dividende, par $2a$ qui renferme 1° le nombre 2 qui est l'exposant de la racine 2° le terme a qui est a une puissance d'un degré au dessous de la 2onde sur laquelle on opere pareillement dans le cube $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, apres avoir trouvé le 1er terme a, il est clair que pour trouver le 2ond terme que nous scavons estre b, il n'y a qu'a diviser le 2ond terme $3a^2b$ du dividende 1° par le nombre 3 qui est l'exposant

delaracine 2° parla puissance a 3 quiest d'un degré au dessous de celle sur laquelle on opere
3° il faudra elever Les termes deja trouves au quelsent aleur puissance, et soustraire cette puis sance du dividande; La soustraction faite, il ne restera rien au dividande, si le dividande est un quarré parfait; s'il reste quelque chose au divi dande apres la soustraction c'est une marque que le dividande n'est pas un quarrée parfait et qu'on n'en peut pas extraire La racine juste et exacte

Regle 2onde

extraire la racine quelconque d'une puissance dont la racine est un trinome ou un quadrinome ou un polinum quelconque

So. la methode est la meme que la precedente, il n'y a de difference que par raport aux opera tions qu'il faut i'cy reiterer plus souvent, c'est pourquoy

1° pour trouver le 1er terme de la racine il faut extraire immediatement La racine du 1er terme de la puissance proposée

2° pour trouver le 2ond terme il faudra 1° ele ver a sa puissance le terme deja trouvé, et le soustraire du dividande 2° il faudra diviser Le 2ond terme du dividande par l'exposant de la racine 3° il faudra le diviser ~~en~~ encore

par le terme deja trouvé pour la racine, mais elevée a la puissance d'un degré au dessous de celle sur la quelle vous operes, et vous aures pour quotient Le 2ond terme

3° pour trouver le 3eme terme, il faudra 1° elever les deux termes deja trouvés pour la racine a la meme puissance que celle sur la quelle vous operes, et soustraire cette puissance du dividande 2° il faudra diviser le 1er des termes qui restent au dividande par l'exposant de la racine 3° il faudra le diviser encore par le 1er terme de la racine elevée a la puissance d'un degré au dessous de celle sur la quelle on opere, et le quotient sera Le 3eme terme cherché. en effet si j'ay vy le quarré $a^2+2ab+bb+2ac+2cb+cc$ dont la racine est un trinome $a+b+c$, apres avoir trouvé pour la racine Les deux termes $a+b$, et avoir soustrait Le quarreé $a^2+2ab+bb$ du dividande, il est clair que pour trouver le 3eme terme, il n'y a qu'a diviser l'un des termes restants $2ac+2cb+cc$ par $2a$ qui est composé du nombre 2 exposant de la racine, et de la lettre a qui est une puissance d'un degré au dessous de celle sur la quelle on opere

4° pour trouver le 4eme terme, il faudra 1° elever les 3 termes deja trouves pour la racine a la meme puissance que celle sur la quelle

laquelle on eleve, et soustraire cette puissance ou ce residu de 2°, il faudra faire le reste comme cy dessus pour le 3eme terme

ppreux

pour l'extraction des racines numeriques il faut observer les mesmes regles que pour celles des racines algebriques, a peu pres de la meme facon; ors

1° on suppose que l'on scait extraire la racine d'un nombre lorsqu'elle ne doit pas surpasser 9

2° pour cet effet on peut s'aider de la table suivante que l'on peut aisement continuer jusqu'a la fin

puissances

1eres	2ondes	3emes	4emes	5emes
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768

9 ... 81 ... 729 ... 6561 ... 59049

3° il faut raisonner d'une puissance numerique a peupres comme d'une puissance algebrique, cest a dire que l'un et l'autre sont composes des memes parties: de meme, v.g. que le quarré d'une quantité complexe composeé de deux termes a+b contient le quarré du 1er terme, plus le double du produit du 1er terme par le 2ond, plus le quarré du 2ond terme comme il paroit dans $a^2 + 2ab + b^2$ de meme le quarré d'une quantité numerique composé de deux figures ou chifres contient 1° le quarré du 1er chifre 2° le double du produit du 1er chifre par le 2ond, 3° le quarré du 2ond; il en faut dire autant des autres puissances

4° il suit dela que si l'on partage une puissance numerique en tranches allant de droite a gauche defaçon que chaque tranche contienne autant de chifres qu'il y a d'unités dans l'exposant, la racine sera composeé d'autant de caractères ou chifres qu'il y aura de tranches

extraire la racine quelquonque d'une puissance numerique

So il faut 1° partager la puissance proposée en tranches allant de droite a gauche, enfermant dans chaque tranche autant de chifres qu'il y a de degres dans la racine, ainsi on la separera de deux en deux chifres s'il faut extraire la racine quarrée de trois en trois chifres s'il faut extraire la racine cubique &c et on connoitra par le nombre de tranches le nombre des chifres dont la racine est composée

2° pour trouver le 1er chifre, on tirera la racine proposée de la 1ere tranche, la racine quarreé, s'il s'agit de tirer la racine quarreé; la racine cubique, s'il s'agit &c sans se mettre en peine que cette 1ere tranche contienne autant de chifres que les autres et on ecrira cette racine au quotient

3° pour trouver le 2eme chifre, il faudra 1° elever le chifre trouvé au quotient a la puissance requise et soustraire cette puissance de la 1ere tranche pour sçavoir s'il y a un reste 2° il faudra abaisser a costé du reste le 1er chifre de la 2 onde

tranche 3o on divisera le tout par le nombre de degres de la racine 4o on le divisera encore de plus par le quotient deja trouvé et elevé a une puiss ance immediatement au dessous de celle que l'on vient de soustraire du dividande, et le quotient de cette division sera le 2ond chifre que l'on mettra a la suitte du 1er-

4o pour trouver le 3eme terme, et les sui vants, on suivra le meme ordre, c'est a dire il faudra 1o former la puissance requise du nombre deja trouvé pour la racine et soustraire cette puissa nce des 1eres tranches du dividande-

2o L'on abaissera a costé du reste le 1er chifre de la tranche suivante 3o on divisera le tout par le nombre des degres de la racine 4o on le divisera encore de plus par la puissance du nombre deja trouvé qui est au dessous de celle qu'on vient d'oter, et le quotient sera le chifre demandé

Remarque 1ere

La demonstration de ces regles s'apperçoit bien apres ce que nous avons dit de l'extraction des racines algebriques

Remarque 2onde

ces regles peuvent estre abregées par des methodes particulieres pour l'extraction de la racine quarrée; mais elles sont generales, et pour l'extraction des

autres racines elles prescrivent une methode plus aisée et plus simple que ne pourroit lestre Les methodes particulieres

Section 2eme

analyse des progressions

Les progressions vont ou en decroissant ou en encroissant, nous allons parler de unes et des autres

Chapitre 1er

Des progressions decroissantes

probleme 1er

trouver la somme des termes d'une progression quelquonque de la serie des nombres naturelle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c

Solution Le nombre des termes de la progression soit appellé n, il faudra se servir de la formule generale $\frac{nn+n}{2}$, cest a dire, il faudra prendre la moitie de la somme faitte du quarré du nombre des termes et du nombre des termes luy meme; sy lon veut trouver la somme des termes de la progression naturelle 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou il y a 6 termes, on fera $\frac{nn+n}{2} = \frac{36+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$

Demonstration La raison de cette formule est que la somme des termes d'une progression arithmetique quelconque est egalle a la somme des extremes multipliée par la moitie du nombre des termes; or dans la serie des nombres naturelles Le dernier terme exprime le nombre des termes, et par consequent la somme des extremes est dans cette serie $n+1$ qui etant multiplie par $\frac{n}{2}$ moitie du nombre des termes devient $\frac{nn+n}{2}$

Corollaire

ainsy cette somme se trouve tout d'un coup en prenant le quarré du dernier terme et le dernier terme ensommes et divisant cette somme par 2

Theoreme 1er

une progression geometrique qui va en decroissant sy $\div\div$ 16 · 8 · 4 · 2 · 1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{4}$ et qui a un nombre infini de termes est cependant egal a une somme finie

preuve parceque dans la progression geometrique decroissante les termes decroissent en grandeur a mesure qu'ils augmentent en nombre; ainsy la division qui donne la progression des termes, augmente il est vray leur nombre, mais non pas leur somme.

Theoreme 2end

dans une progression geometrique si le quotient

est 2 ou $\frac{1}{2}$, la somme de tous les termes excepté le plus grand est egal a la difference du 1er terme au dernier. si le quotient $p=3$ ou $\frac{1}{3}$ la somme des termes excepté le plus grand est sous double de la difference du 1er au dernier terme; si $p=4$ ou $\frac{1}{4}$ La somme des termes excepté le plus grand est sous triple de la difference du 1er au dernier terme et ainsy de suitte

preuve si le quotient $p=2$ La progression ÷ a. ap. ap2. ap3. ap4 &c deviendra ÷ a. 2a. 4a. 8a. 16a &c. or la somme des termes de cette derniere progression (excepté le plus grand 16a) est 15a = 16a − a donc &c.

Corollaire 1er

donc la somme des termes d'une progression quelconque est egale a la somme faite du plus grand terme, et de la difference du 1er au dernier terme soit simple, soit sou double, soit &c.

Corollaire 2nd

donc la somme des moitiés

$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}.\frac{1}{64}.$ &c $= 1$

La somme des tiers $\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}.\frac{1}{81}$ &c $= \frac{1}{2}$

La somme des quarts $\frac{1}{4}.\frac{1}{16}.\frac{1}{64}.\frac{1}{256}$ &c $= \frac{1}{3}$

en general on connoitra la somme d'une progression geometrique decroissante dont les termes sont des fractions, en retranchant une unité du denominateur du 1er terme, ex. la somme des termes de la progression $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10000}$ & $= \frac{1}{9}$.

Corollaire 3eme

ainsi l'on trouvera aisement la somme d'une progression geometrique decroissante qui est composée en partie de nombres entiers, en partie de fractions; car on connoistra la somme des entiers en les ajoutant, et celle des fractions par la regle precedente, c'est pourquoy la somme des termes de la progression decuple

$\div 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$ & $= 11 + \frac{1}{9}$

probleme 2eme

trouver le point ou achille doit atteindre la tortue, en supposant que achille a deux fois plus de vitesse, et que la tortue a sur achille une avance de deux lieux

So: achille attrapera la tortue a la fin de la 4eme lieue: car le chemin fait par la tortue qui a deux fois moins de vitesse s'exprime par

La serie $\div 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$ &c $= 2$; et le chemin parcourru par achille qui a deux fois plus de vitesse s'exprimera par la serie $\div 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$ &c $= 4$ or achille ayant par l'hypothese deux fois plus de vitesse que la tortue, fera 4 lieues dans le temps que la tortue n'en aura fait que deux, donc achille attrapera la tortue a la fin de la seconde lieue

Theoreme 3eme

La progression arithmetique des fractions est egale a une somme infinie

preuve La serie arithmetique des fractions est $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ &c or cette serie ou progression est infinie, parceque pour avoir la somme de tous les termes qui la composent, il faut sans cesse ajouter l'unité a l'unité, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{26}{24} = 1 + \frac{1}{12}$, dans l'addition des termes de cette progression, il faut sans cesse ajouter l'unité a l'unité or une addition successive d'unités qui se fait sans fin donne une somme infinie, donc &c -

Des progressions croissantes

Theoreme 1er

La somme des termes d'une progression quelquonque qui va toujours en croissant sans fin, est infinie

preuve la plus petite de toutes les progressions croissantes est, 1·1·1·1·1· &c or la somme des termes de cette progression est infinie, comme il est evident, donc a plus forte raison la somme des termes des series 1·2·3·4·5·6· & 2·4·6· 8·10 &c doit estre infinie

Corollaire

si les unites 1·1·1·1·1· &c representent des points, la somme des termes representra la ligne si les unites representent des lignes, la serie representra une surface: si les unites representent des surfaces, la serie representra un solide

Theoreme 2ond

La serie ou la progression des nombres naturelles est plus qu'infinie, ou elle est infiniment infinie

preuve La progression 1·1·1·1·1· &c est infinie comme nous l'avons prouvé or la serie 1·2·3·4·5·6 &c

est infiniment plus grande qu'elle car on peut prouver qu'elle plus que double, plus que triple, plus que quadruple plus que centuple & en un mot qu'elle est plus grande qu'aucun multiple assignable de la serie 1·1·1·1·1 &c, car si le 2me terme de la serie 1·2·3·4·5·6·&c etoit continué a l'infini, il donneroit une serie double: si le 3eme terme etoit continué a l'infini, il donneroit une serie triple: pareillement le centieme terme donneroit une serie centuple; le millieme donneroit une serie milles fois plus grande &c

Corollaire

si les nombres 1,2,3,4,5,6 &c qui composent la serie precedente, representent des lignes, la serie entiere representera un triangle: en effet on peut concevoir le triangle comme composé d'une infinité de lignes qui croissent uniformement, c'est a dire selon la progression arithmetique des nombres naturelles depuis le sommet jusqu'a la base

5 theoreme 3eme

La serie des nombres quarres 1,4,9,16,25, 36 &c est encore infiniment plus grande que la serie des nombres naturelles

preuve car on peut prouver de la meme maniere

que cy dessus qu'elle est plus que double plus que quadruple, plus que decuple plus que centuple en un mot qu'elle est plus grande qu'aucun multiple assignable de la serie des nombres naturels: en effet cette serie contient les quarres des nombres de la serie naturelle donc si les quarres croissent seulement en raison double de leur racine, la serie des quarres seroit double de celle des nombres naturels: s'il croissoint seulement en raison triple, elle seroit triple de la serie des nombres naturels: ors a mesure que le nombre des termes de la serie augmente, plus la raison des quarres avec leur racine augmente aussi et devient grande, car la raison du quarré 4 a sa racine 2 est doublée, celle de 9 a 3 est triplée celle de 16 a 4 est quadruple, celle de 25 a 5 est quintuple, &c donc &c

Corollaire 1er

Si les termes de la serie ou progression des quarres 1, 4, 9, 16, 25 &c representent des quarres mis les uns sur les autres, alors la serie entiere representera une pyramide.

Corollaire 2ond

1° La somme des termes de la serie ou progression des unites 1·1·1·1·1·&c etant une somme infinie, cette infinie s'appelle un infini du 1er ordre

et s'exprime par le signe ∞
2° la somme des termes de la progression des nombres naturels etant infinie par raport a celle des unites, cet infini s'appelle un infini du 2e ordre et s'exprime par ∞^2 la somme des termes de la progression des nombres quarres etant encore infinie par raport a celle des nombres naturels cet infini s'appelle un infini du 3eme ordre, et s'exprime par ∞^3
4° or une quantite infinie d'un ordre inferieur, est cense nul par raport a une quantite infinie d'un ordre superieur, car toute quantite doit estre censee nulle par raport a une autre par qui elle est surpassee une infinite de fois

problème 1er.

trouver la somme des termes de la serie infinie des nombres naturels

So: cette serie infinie est 0, 1, 2, 3, 4, ... ∞, or pour trouver la somme de tous les termes qui composent cette serie, il faut se servir de la formule $\frac{nn+n}{2}$ dont nous avons parle, et qui etant appliquee au cas dont il s'agit icy devient $\frac{\infty^2+\infty}{2}$ or la quantite ∞ est nulle par raport

a la quantité ∞^2) donc la formule devient $\frac{\infty^2}{2}$ donc la somme des termes de la suitte des nombres naturels $= \frac{\infty^2}{2}$

problème 2ème

trouver la somme de tous les termes de la serie infinie des nombres quarres,

So: La suitte infinie des nombres quarres est 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... ∞^2; or si nous faisons 2 progressions dont l'une soit la suitte des nombres quarres, et l'autre soit une progression uniforme dont chaque terme seroit egal au dernier terme de la serie des nombres quarres et si nous comparons un certain nombre de termes de l'une et l'autre progression, v.g.

1° si nous comparons ensemble les deux 1ers termes des deux progressions

- - - - 0 . 1 .

1 . 1

La somme des termes de la 1ere progression sera sous double de la somme des termes de la 2onde, et par consequent sera par raport a elle comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

2° si nous comparons les 3 iers termes des deux progressions . . . . . 0·1·4

4·4·4

La 1ere somme sera = 5 et la 2onde sera = 12 et par consequent la serie des quarres sera par raport a la serie uniforme comme $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{12}$ or s remarques que la fraction $\frac{1}{12}$ est plus petite que la fraction $\frac{1}{6}$ et par consequent que les deux sommes approchent plus que dans le cas praecedent, d'estre le tiers l'une de l'autre

3° si nous comparons les 4 iers termes des deux progressions . . . . . . 0·1·4·9

9·9·9·9

La somme de la 1ere serie sera 14 et celle de la 2onde sera 36 ainsi la 1ere sera par raport a la 2onde comme $\frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ or la fraction $\frac{1}{18}$ est encore plus petite que la fraction $\frac{1}{12}$ que nous avons dans le cas praecedent, ainsi les deux sommes approchent encore plus d'estre le tier l'une

de l'autre.
4° si nous comparons ensemble 5, 6, 7, 10, 20, 100, & terme des deux progressions plus nous prendrons de termes dans les deux progressions, plus les deux sommes approcheront de la raison $\frac{1}{3}$, parceque plus l'on prendra de terme, plus les fractions $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}$, & qui se trouvent sur ajoutes iront en decroissant, si nous prenons une infinité de termes dans l'une et dans l'autre progression, la fraction sur ajoutée deviendra infiniment petite, et par consequent nulle, et les deux sommes deviendront exactement le tiers l'une de l'autre
5° ors en poussant les deux progressions a l'infini ors aura pour progression des nombres quarres, et pour progression uniforme, les deux suivantes

$0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdots\cdots\cdots \infty^2$
$\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 \cdots\cdots \infty^2$

ors la somme des termes de la 2nde progression est $= \infty^3$, donc la somme des termes de la 1ere progression qui en est le tiers sera

$288 = \frac{\infty^3}{3}$

Scholie

cette maniere de demontrer cette ppsion, qui est tirée du livre des mathematiques universelles, est une methode d'aproximation qui parvient cepandant a une veritable exhaustion; et est fondeé sur le principe que les quantites qui approchent d'une certaine pprieté lors qu'elles tendent a l'infini, doivent estre censées avoir acquises ces pprietes, lorsqu'elles sont parvenues a l'infini

Corolleire 1er

1° si nous prenons la serie des nombres naturels et que nous la comparions avec une serie uniforme dont chaque terme soit egal au dernier terme de la serie naturelle v.g.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c
6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, &c

il est evident que la somme des termes de la serie uniforme sera double de celle des nombres naturels quel que soit le nombre de l'une et l'autre serie; or la serie

des nombres naturels represente un triangle, vy o B l C fig 3 tab 5, dont le sommet est o, et dont les lignes v1 o, v1 o, v1 o &c, paralleles a la base du triangle, (et qu'on appelle les ordonnes du triangle) croissent uniformement selon la progressi on des nombres naturels 0,1,2,3,4 &c pareillement la serie uniforme represente un parallelogramme de meme hauteur et de meme base que le triangle, d'ou l'on conclut que le parallelogramme est double du triangle de meme base et de meme hauteur

2° si l'on suppose que le triangle devient une pyramyde A B C l fig 3 tab 6 et que le parallelogramme devienne un prisme de meme base et meme hauteur que la pyramyde; on concoit alors, que le prisme sera un amas de quarré poses les uns sur les autres qui seroient tous egaux a la base et entre eux, et que la pyramyde sera aussi un amas de quarres poses les uns sur les autres dont les costes iront en dec-

roissant

290

decroissant depuis la base jusqu'au sommet ors les quarres qui composent la pyramide, ou les ordonnes du triangle etant representes par la serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. leurs quarres seront representes par la serie 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c. dont la somme des termes donnera la pyramide et le prisme sera represente par la somme des termes d'une serie unifo rme dont chaque terme sera egal au dernier terme de la serie des quarres, ors comme nous l'avons prouvé, cette serie uniforme est triple de la serie des quarres des nombres naturels d'ou l'on conclut que le prisme est triple de la pyramide de meme base et de meme hauteur

Corollaire 2nd.

1.° comme l'on a prouvé que la somme des termes de la serie naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4 &c. est $= \frac{\infty^2}{2}$ et que la somme des termes de la serie des nombres quarres 0, 1, 4, 9, 16, &c est $= \frac{\infty^3}{2}$ de meme aussi l'on prouve que la somme des termes des nombre cubiques 0, 1, 8, 27, &c. est $= \frac{\infty^4}{4}$; que la somme

de toutes les 4emes puissances est egale a un infini du 5eme ordre divisé par 5 d'ou

2° on conclut en general que la somme de toutes les puissances m possible des termes consecutifs de la suitte naturelle des nombres est $= \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$ &

Theoreme 4eme

La serie des nombres impaires prolongée a l'infini est double de la serie simple des nombres naturels.

preuve la serie des nombres impaires est

1, 3, 5, 7, 9 11, 13, &c

laquelle est egale aux deux series suivantes

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c
1 2 3 4 5 6 &c

c'est a dire la serie des nombres impairs est egale a la serie des nombres naturels prise deux fois donc elle en est double et par consequent la somme des termes de la serie des nombres naturels etant $= \frac{\infty^2}{2}$, il suit que la somme de tous les nombres impaires est $= \infty^2$

Theoreme 5eme

La serie infinie des nombres paires est egale

a la serie infinie des nombres impeurs
preuve parceque l'une et l'autre est double
de la serie ~~naturel~~ des nombres naturels car
1° la serie des nombres impeurs en est double
comme nous l'avons prouvé 2° la serie des
nombres impeurs en est aussi double car
chacun de ces termes est double du terme cor
respondant dans la serie des nombres natu
rels comme on le peut voir en les comparant

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c
2, 4, 6, 8, 10, 12, &c

Theoreme 6eme

une progression geometrique croissante
v.g. 1, 2, 4, 8, 16 &c est infinie par rapport a une
serie arithmetique,
preuve parceque une serie arithmetique ne
prend ses accroissements que par la voye d'additi
on, au lieu que la geometrique augmente par voye
de multiplication, or la multiplication eleve les
quantites a de la derniere expression, comme on
le peut voir en comparant ensemble deux pro
gressions l'une arithmetique l'autre geo

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 &c.

dans laquelle chaque terme de la progression geometrique devient d'autant plus grand par rapport aux termes correspondants de la progression arithmetique que le nombre de termes devient plus grand

objection il est impossible que la somme des nombres quarres soit $= \infty^3$ tandis que la somme des nombres naturels est $= \frac{\infty^2}{2}$ et par consequent moindre; car la serie des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. contient tous les nombres quarres possibles, et meme contient de plus tant les nombres impairs que les nombres peirs qui ne sont pas quarres donc &c.

Reponse il est vray que la somme des nombres quarres en tant que lon prend ces nombres quarres dans la serie des nombres naturels, est plus petite que la somme des nombres naturels parceque alors elle fait partie de la somme des nombres naturels mais elle est plus grande si vous prenes les nombres quarres ors de la

serie des nombres naturels, cest a dire, si vous pre
nes le quarré de chaque terme de la serie des no
mbres naturels, car chaque terme de cette serie
naturelle a son quarré, donc puis qu'il y a une
infinité de nombres naturels, il y a aussi une
infinité de quarrés, mais les quarrés croissent
dans une plus grande proportion que les nombres
naturels eux mesmes, comme on le peut voir en
comparant les deux serie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 &

Donc &

Livre 2ond

Theorie de la geometrie composée

1° La geometrie composée examine dans sa
theorie la nature et les proprietés des lignes
courbes du 2ond genre, qu'on appelle autre
ment section conique,
2° on les appelle sections coniques parceque

dans le cone on fait differentes sections par le moyen d'un plan, ces lignes qui en ont de courbes dans l'extremité de ces sections 3° nous parlerons 1° des sections coniques considerées dans le cone 2° des sections coniques considerées hors du cone.

Section 1ere

Des sections coniques dans le cone

nous parlerons 1° de l'origine des sections coniques 2° de leur nature

Chapitre 1er

de l'origine des sections coniques

1° Le cone est un solide qui comme le triangle, decroit uniformement depuis la base jusqu'au sommet

2° Le cone peut estre regardé comme un amas de cercles dont les diametres decroissent uniformement depuis la base jusqu'au sommet, d'ou il suit que toutes sections faites dans le cone, qui seroient paralleles a la base, donneront un cercle parallele a la base

3° si on coupe le cone en faisant tomber un plan du sommet du cone tout perpendiculairement

perpendiculairement soit obliquement sur la base du cone la section faite par ce plan sera un triangle plus ou moins large selon que le plan sera plus ou moins perpendiculaire a la base.

4° c'est pourquoy le cone peut estre regardé comme un solide formé par la revolution d'un triangle rectangle dont l'hypothenuse tourneroit autour du coté vertical pris comme axe d'ou il suit que la surface du cone resulte en dernier lieu de la ligne droite et circulaire combinées ensemble et temperees l'une par l'autre parce que le triangle generateur du cone pour former le cone se meut circulairement, et que dans la revolution de ce triangle chacune de ces ordonnées decrit chacun des cercles dont la somme donne la solidité du cone, et que l'extremité de chaque ordonnée decrit chacune des circumferences dont la somme donne la solidité du cone

Theoreme

1° si on coupe le cone par un plan paralelle a la base, la section donnera un cercle comme nous l'avons dit, et si on coupe le cone par un

plan perpendiculaire a la base la section sera
un triangle comme nous l'avons dit

2° mais si le plan coupant au lieu d'estre paralel
a la base venoit un peu a se pancher et a devenir
oblique sur cette base, alors la section sera un
cercle retrecis d'une part, et alongé de l'autre,
plus ou moins selon que la section sera plus ou
moins oblique sur la base

3° cette section s'appelle oval et quelquefois
ellypse: or l'oval et l'ellypse sont plus ou
moins allongés selon qu'elles participent plus
ou moins de la rectitude laterale du cone que
de sa circularité

section 2onde

si le plan coupant etoit oblique sur la base de façon
qu'il devint tout a fait paralel au coté AC
fig 11 tab 6 et qu'il eut pour axe la ligne DH
alors la section s'appelle une ellypse mais infinie

2° cet ellypse ~~seroit~~ est dise, infini parce qu'elle n'a pas
de somet inferieur; en effet cet ellypse etant
paralel au costé du cone ne peut pas sortir
hors du cone, mais qualque prolongé qu'on la sup
pose, elle demeure tousjours en dedans du

du cone parce qu'elle conservera toujours son parallelysme avec le coté du cone

3° ~~ou cet~~ ellypse s'appelle une parabole la parabole est donc une courbe infinie qui resulte d'une section dont le plan est parralel au coté du cone et qui quelque prolongée qu'on suppose le cone n'en sortiroit jamais mais resteroit toujours en dedans et iroit toujours en s'elargissant de meme que le cone luy meme s'il etoit prolongé

quatorzieme

1° si le plan coupant etoit perpendiculaire a la base BC fig 12 sub 6 de façon qu'il passat par la ligne DG ou meme s'il passoit par quelqu'une des lignes DH DI, mais sans estre parallele au coté du cone, alors la section donneroit une courbe qui seroit infinie comme la precedente, parce que qu'elle que prolongée qu'on la supposa, elle resteroit toujours en dedans du cone, a cause soit de son parallelisme avec le coté du cone qui la retient en dedans du cone; soit de son obliquité sur la base du cone qui approchant du parallelisme avec l'axe empeche la courbe de sortir hors du cone

2° cette courbe s'appelle un hyperbole. l'hyperbole est donc une courbe infinie qui resulte d'une section ou parallelle a l'axe du cone, ou oblique a la base du cone sans estre parallelle au coté, et qui quelque prolongé qu'on suppose le cone n'en sortiroit jamais, mais iroit toujours en s'élargissant, ainsi que le cone luy meme — pponzerre

il n'est pas possible de faire dans le cone de sections d'ou il resulte d'autres figures que les 5 que nous venons d'avoir sçavoir le triangle le cercle, l'ellipse, la parabole, et l'hyperbole.

car 1° ou le plan coupant passera par le sommet du cone, ou par un point de la surface du cone

2° si le plan passe par un point de la surface du cone ou il sortira hors du cone, ou il restera en dedans du cone

3° si le plan coupant reste au dedans du cone ou il sera paralele au coté du cone ou il sera paralel a l'axe du cone ou il sera melme sur l'un et sur l'autre

il n'y a d'autre voix que celle de couper un cone par un plan, ors si le plan coupant passe par le sommet du cone, la section sera un triangle, en quelque point de la base que se termine cette section si le plan passe par un point de la surface et qu'il sorte hors du cone, alors ou le plan sera paralel a la base

et la section sera un cercle, ou le plan sera incliné sur la base et alors la section sera un ellypse ; si le plan reste en dedans du cone et quil soit paralel au cotés du cone la section sera une parabole ; si le plan est paralel a l'axe ou bien est incliné et sur la axe et sur le coté du cone la section sera un triangle [illegible]

Chapitre zonre

De la nature des sections coniques

nous parlerons 1° des sections circulaires et ovales 2° des sections parabolyques et hyperbolyques

article 1er

Des sections circulaires et ovales

Premiere

1° La section horisontale en quelque point pris dans la hauteur du cone quelle se fasse donne toujours des cercles semblables paralelles entre eux et a la base, plus grand vers la base et plus petits vers le sommet

2° les sections obliques lorsqu'elles sont egalement obliques c'est a dire paralleles entre elles, tels que sont v.g. les sections FK, DL fig 13 tab 6, d'une des ovales semblables c'est a dire dont les longeurs et les largeurs sont proportionelles entre elles, et cela a cause de l'uniformité du cone qui decroit toujours uniformement depuis la base jusqu'au sommet

3° Les sections differemment obliques tels que sont les sections FG, FK qui partant d'un meme point determinent a des points differents d'une des ovales dissemblables car celle des ovales qui est la plus oblique est aussi la plus allongee, parcequ'elle participe plus de la rectitude laterale du cone que de la circularité

Seconde

1° L'ellipse formé par la section faite dans le cone est toujours uniforme dans tous les points opposés, v.g. dans les extremites D, L fig 13 tab 6 quoique les cercles ou aboutissent ces extremites soyent inegaux, etant plus petits vers le sommet, et plus grand vers la base du cone

2° La raison est que la section qui forme l'ellipse se participe egalement dans ces deux extremites

opposées de la rectitude et de la circularité du cone.

3.° en effet la section passant par le plus petit cercle du coté du sommet et par le plus grand cercle du coté de la base ne prend pas plus de courbure dans les uns que dans les autres, parceque le plan coupant dirigé selon la ligne D L étant plus oblique sur le coté A C que sur le coté A B prend par de plus grandes portions de cercles superieurs et plus petites, et par de moindres portions de ce cercle inferieur, et plus grand puisque du meme coté sçavoir du coté K il coupe de plus grands segments des cercles superieurs et de moindres segments des cercles inferieurs

article 2.ond

Des sections parabolyques et hyperboliques

I.re mon pere.

Les sections parabolyques sont toutes semblables entre elles, parceque les plans de section qui donnent les paraboles sont paralels entre eux : parce qu'ils sont paralels a l'un des cotés

pproposition onze.

La section hyperbolique DCL fig 14 tab 6 estant toujours perpendiculaire a la base, ou du moins approchant toujours plus de la perpendicularite que la section parabolique a toujours par cette raison une section triangulaire correspondante vg BAC dans un meme cone a laquelle elle est parallelle et dont elle imite la nature et toutes les affections

pproposition onzeme

La section hyperbolique a plus de courbure dans son sommet et moins de courbure dans ses branches que les autres sections parceque estant plus perpendiculaire sur la base elle se hate plustost d'y arriver et par cette raison participe plus dans les branches, et moins dans son sommet de la rectitude du cone, car l'ouverture des branches estant brusque, forme un plus grand pli dans le sommet

Corollaire

c'est pourquoy L'oval est plus courbe dans

son sommet, et l'est moins dans ses branches que le cercle et la parabole que l'ovale, et l'hyperbole que la parabole;

moien Dzieme

1° comme la section triangulaire vy B A C est appuyé sur un diametre B C du cercle qui sert de base au cone, de meme l'hyperbole est appuyée par ses extremités sur une corde B C parallelle au diametre dans ce meme cercle.

2° comme le diametre qui appuye les branches du triangle devient d'autant plus grand que le triangle approche plus de la base d'ou il suit que les costes du triangle s'ecartent toujours de plus en plus l'un de l'autre, de meme la corde qui appuye les branches de l'hyperbole est d'autant plus grande qu'elle approche de la base et par consequent les branches de l'hyperbole secartent tou jours de plus en plus l'une de l'autre en sorte que dans une distance infinie du sommet

d'aucune, ~~p~~ Mais en seroit infiniment eloignés
l'un de l'autre
2° ors parceque plus le cercle devient
grand plus la corde prise toujours a egale
distance du diametre approche d'estre
egale au diametre (car l'arc qui separe
la corde et le diametre etant toujours egal,
a par consequent ~~plus~~ moins de courbure
dans un grand cercle que dans un petit) il
s'ensuit que les branches de l'hyperbole
s'approcheront toujours de plus en plus des
costes du triangle a mesure qu'ils seront
prolongés   Corollaire 1er
donc si l'on prolonge a l'infini les costes
de l'hyperbole et le coté du triangle, les
branches de l'hyperbole s'approcheront
toujours de plus en plus des costes du tria
ngle sans jamais les toucher si ce n'est
dans une distance infinie

Corollaire 2ond

Les costes de ce triangle dont les branches

de l'hyperbole s'approchent toujours de plus en plus s'appellent les assymptotes de l'hyperbole, et le triangle s'appelle le triangle assymptotique; ainsi la principale propriété de l'hyperbole est de s'approcher toujours de son assymptote sans jamais l'atteindre, si ce n'est lors que l'un et l'autre sont prolongés a l'infini

Section 2onde

Des sections coniques considerées hors du cone

il y a deux sortes de sections coniques, les unes sont finies, periodiques, et rentrantes en elle meme, tels sont le zangle, le cercle, et l'ellypse; Les autres sont infinies et ne rentrent jamais en elle meme, et elles s'appellent paraboles et hyperboles; nous avons parlé ailleurs du triangle, nous allons parler maintenant des autres sections coniques.

Chapitre 1er.

Du cercle premierement

La principale propriété du cercle est que

toute ligne F G, D L perpendiculaire au diametre, fig 13 tab 6: est moyenne pportionelle entre les deux segments du diametre preuve elle a eté donné dans la geometrie recti ligne: or les lignes F G, D L, M C au dia metre, s'appellent ordonnes au diametre, ou ordonnes du cercle: les segments A C, C B, ou A B, D B, ou A F, F B s'appellent les abcisses, les abcisses et les ordonnes pris ensemble s'appellent co-ordonnes

pp[ro]position 2onde

dans le cercle le quarré des ordonnes est egal au rectangle des abcisses

preuve l'ordonné dans le cercle est moyenne pportionelle entre les deux abcisses c'est a dire $AD \cdot DL :: DL \cdot DB$, donc $DL^2 = AD \times DB$

Corollaire 1er.

donc dans le cercle les quarres des ordonnes sont entre eux comme les rectangles des abcisses, c'est a dire l'on a fig 13 tab 6 $\overline{DL}^2 \cdot \overline{FG}^2 :: AD \times DB \cdot AF \times FB$

Corollaire 2onde

1° on appelle le rayon du cercle r; l'ordonné M C, ou D L, ou F G s'appelle y, l'abcisse A C, ou

AD ou AF s'appelle x: en general les quantites, x, y, se prenent pour representer les ordonnées et les abcisses de toutes sortes de lignes courbes. Le Diametre du cercle sera par consequent $2v$, et la co-abcisse CB, ou DB, ou FB sera $2v - x$

2° Il suit que la proportion du corollaire precedent se reduira a celle cy $x . y :: y . 2v - x$: d'ou lon tire lequation $yy = 2vx - xx$ que lon appelle lequation du cercle ou le cercle reduit en calcul, par ce quelle exprime la proprieté caracteristique du cercle:

3° cris de cette equation on deduit facilement toutes les proprietes que nous avons prouves ailleurs appartenir au cercle: et en general il faut remarquer que cest lors que lon a lequation d'une ligne courbe quelconque que la nature et les proprietes de cette courbe peuvent estre facilement connues, par ce quon peut les deduire de lequation de la courbe, nous allons voir des exemples dans le cercle.

pporizeme

Si labcisse x est supposée egale a la ligne AC, et par consequent lordonné y = CM alors on aura $x = v$, donc en substituant v a la place de x dans lequation $yy = 2vx - xx$ cette equation deviendra $yy = 2vv - vv$, ou $yy = vv$, donc

$y=r$, donc toutes les fois que l'abcisse est egale au rayon il suit que l'ordonné est aussi egal au rayon d'ou l'on conclut que toutes les lignes tirées du centre, c'est a dire que tous les rayons sont egaux

pposition 4ème

de meme si l'on suppose $y=r$, alors l'equation du cercle deviendra $rr=2rx-xx$ et transposant on aura $xx-2rx+rr=0$ ce qui donne un quarré parfait, dont la racine est $x-r=0$ d'ou il suit que $x=r$ par consequent toutes les fois que l'ordonné est egale au rayon, l'abcisse devient aussi egale au rayon, c'est a dire on conclut la meme chose que dans la supposition precedente mais d'une autre facon

pposition 5ème

1° si l'on suppose $x=2r=AB$, alors l'equation du cercle deviendra $yy=4rr-4rr$, donc $yy=0$ et $y=0$, d'ou il suit que lorsque l'abcisse est egale au diametre l'ordonné est nul a l'extremité de cette abcisse, et par consequent que cette extremité B de l'abcisse est aussi l'extremité du diametre

2° si l'on suppose $x=0$, l'equation du cercle deviendra $yy=0$, donc $y=0$ d'ou il suit que le point A est l'origine du diametre et

des abcisses   proposition 6eme

si on suppose l'abcisse x plus grande que le diametre, ay si l'on fait $x=3r$, l'aequation du cercle deviendra $yy=6rr-9rr=-3rr$, donc $y=\sqrt{-3rr}$, or cette racine etant imaginaire denote que la quantité $x=3r$ est une quantité impossible, et par consequent que les abcysses du cercle prises dans le diametre ne peuvent point s'etendre au dela de l'extremité B du diametre

proposition 7eme

si dans le cercle fig 13 tab 4 on prend la ligne AD pour abcysse x, et la ligne DC pour co-abcysse $2r-x$, la ligne BD pour ordonnee y, 1° acause des deux triangles rectangles ABD et DBC, l'on aura $\overline{AB}^2=yy+xx$, et $\overline{BC}^2=yy+4rr-4rx+xx$, donc les deux quarrés $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2yy+2xx-4rx+4rr$

2° l'aequation du cercle etant $yy=2rx-xx$, il s'en suit que $2yy=4rx-2xx$,

donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4rx - 2xx + 2xx - 4rx + 4rr = 4rr$; donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4rr$; cest a dire que les quarres faits sur les lignes AB et BC sont tous les deux pris ensemble egaux au quarré du diametre d'ou lon conclut cette proposition du cercle scavoir que l'angle inscrit appuyé sur le diametre est droit

Chapitre 2ond.

De L'ellypse

premiere

1° lellypse est une courbe qui derive immediatement du cercle ou plutost lellypse n'est rien autre chose qu'un cercle allongé ou retreci

2° en effet tirant un cercle fig 16 tab 6 on tire des ordonnes qui remplissent toute la surface du cercle et si lon prend soit la moitie soit le quart soit le tiers, soit & de ces ordonnes en les divisant cy au point K, H, F, O, &

au dessus et au dessous du diametre et qu'on fasse passer une ligne par ces points de division, cette ligne sera un cercle retreci et donnera un ellypse

3° pareillement si au lieu de diviser les ordonnées pouvant prendre la moitie, le quart &c. on double on triple on quatruple & les ordonnes de part et d'autre, comme on peut voir fig 17. alors la ligne qui passera par les extremites de ces ordonnes, sera un cercle allongé et donnera encore un ellypse

Corollaire

d'ou il suit que l'ellypse est une surface qui est ou multiple ou sous multiple du cercle parce qu'elle est formé par le retrecisse ment ou l'allongement d'un cercle, et par consequent qu'il n'est pas plus possible de quarrer la surface de l'ellypse, que celle du cercle

proposition 2onde

c'est pourquoy l'ellypse etant multiple ou sous multiple participe de toutes les proprietes du cercle: or, comme dans le cercle

Le quarré de l'ordonné G l ou $\overline{Gl}^2$ est egal au rectangle des abcisses, de meme dans l'ellypse le quarré de l'ordonné F G ou $\overline{FG}^2$ sera nompas il est vray egale a le meme rectangle des abcisses, mais il en sera ou le quart ou la 9 eme ou la 16 eme partie &c. selon que cet ordonné F G sera ou la moitie ou le tiers ou le quart &c. de l'ordonné G l du cercle

unzieme

de plus comme dans le cercle on a la proportion $\overline{Dl}^2 \cdot \overline{lG}^2 :: AC \times CB \cdot AG \times GB$, par ce que les quantites egales sont entre elles comme d'autre quantites egale, de meme dans l'ellypse on a la proportion $\overline{HC}^2 \cdot \overline{FG}^2 :: AC \times CB \cdot AG \times GB$ par ce que les parties aliquottes sont entre elles comme les touts

Corollaire

toute la difference qui se trouve entre le cercle et l'ellypse est qu'a dans le cercle les quarres des ordonnes sont egaux au rectangle des abcisses

corres pendantes, au lieu que dans l'ellypse
Les quarres des ordonnes sont nonpas egaux, il
est vray, mais proportionelles au rectangle des
abcysses cette methode de faire deriver l'ell
ypse du cercle est fort ingenieuse, elle a eté
trouvée par gregoire de St vensent et de
puis cette idée a eté fort heureusement mise
en usage par Hardy qui a fait deriver de
l'ellypse le cercle et les autres sections coni
ques

proposition une

1° en supposant que le centre du cercle et de l'elly
pse est le point C fig 16 tab 6 la ligne AB
se nomme ches les geometres le grande aix, et
la ligne HCI s'appelle le petit aix

2° or selon ce qui a eté dit cy dessus on a $\overline{FG}^2 \cdot$
$AG \times GB :: \overline{HC}^2 \cdot AC \times CB$, or $AC \times$
$CB = \overline{AC}^2$ donc on aura $\overline{FG}^2 \cdot AG \times CB$
$:: \overline{HC}^2 \cdot \overline{AC}^2$ c'est a dire le quarré d'un
ordonné est au rectangle de cette abcysse cons
tamment comme le quarré du petit aix est
au quarré du grand aix.

ppo:on 5eme

1° on appelle le grand demi aixe - - - - - A

le petit demi aixe - - - - - - - - - B

L'abcisse - - - - - - - - - - - - x

La coabcysse sera par consequent 2a — x

L'ordonné - - - - - - - - - - - - y

2° on aura par consequent dans l'ellypse l'equation $BB \cdot AA :: yy : 2Ax - xx$, d'ou l'on tire cette equation $Ayy = 2ABBx - Bxx$ et divisant tous les termes par BB on aura l'equation $\frac{AA}{BB} yy = 2Ax - xx$

3° cette equation ainsy reduitte est l'equation de l'ellypse, qui la differentes seulement de l'equation du cercle que l'on sex membre yy est affecté du coefficient $\frac{A}{B}$ qui exprime l'inegalité des deux aixes de l'ellypse ou le rapport qui se trouve entre l'allongemant et le retrecisse ment qui du cercle ont fait naitre l'ellypse.

ppo:on 6eme

en effet il est si vray que l'ellypse n'est rien

autre chose qu'un cercle allongé d'une part et retreci de l'autre que si l'on rend egaux les deux axes de l'ellypse en faisant $A = B$ alors l'equation de l'ellypse se changera en celle du cercle $yy = 2rx - xx$ car

1° supposant $A = B$ alors $\frac{A}{B} = \frac{1}{1} = 1$ ~~alors~~

2° supposant $A = r$ alors $2Ax = rx$

3° donc au lieu de $\frac{A}{B}\,yy = 2ax - xx$

on aura $yy = 2rx - xx$

ppoon ... eme

jusqu'a present nous n'avons consideres les ordonnes de l'ellypse que par raport au grand aix, et en ce cas nous avons consideres l'ellypse comme un cercle allongé l'on peut aussy considerer ces ordonnes par raport au petit aix et alors on considereroit l'ellypse comme un cercle retrecy

ppoon ... eme

Nous pouvons raisonner de l'ellypse comme

nous avons fait cy devant du cercle: c'est pour quoy si dans l'equation $\frac{A}{B}yy=2Ax-xx$ l'on supposoit $A=x$ alors on auroit $\frac{A}{B}yy=2A-A=AA$ d'ou l'on conclut $\frac{A}{B}y=A$, donc $Ay=AB$ donc $y=B$ c'est a dire lorsque l'abcysse $\underline{x}$ est supposé egale au grand demi aix A, alors l'ordonné y devient egal au petit demi aix

Chapitre 3eme
De La parablle
premier

1° de meme que nous avons fait deriver l'ellypse du cercle, en allongeant un des aixs du cercle et en retrecissant l'autre nous pouvons aussy faire deriver la parabole de l'ellypse en prolongeant le grand aix de l'ellypse jusqu'a l'infini

2° en effet pour prolonger le grand aix de l'ellypse a l'infini, il n'y a qu'a incliner le plan coupant D S fig 11 fab 6 sur la base

tellement qu'il ne puisse plus sortir du cone mais qu'il devienne paralelle au costé du cone alors l'axe de l'ellypse defini qu'il etoit deviendra infini, et la section que donnera le plan coupant sera parabolique, donc la parabolle n'est qu'une ellypse allongeé a l'infini et par consequent ne doit differer de l'ellypse que par raport a cet allongement infini

2ᵉ raison Seconde

c'est pour quoy de l'equation de l'ellypse nous pouvons tirer imediatement celle de la parabolle en supposant que dans l'equation de l'ellypse $\frac{A}{B}yy = 2Ax - xx$ la quantité $\frac{A}{B}$ qui exprime le grand aix de l'ellypse est une quantité infinie: car alors la quantité $2Ax$ dans le 2ond membre de l'equation sera infinie par raport a la quantité $-xx$ donc celle cy sera nulle et deviendra zero dans l'equation, donc l'equation de l'ellypse deviendra $\frac{A}{B}yy = 2Ax$, et divisant

foute l'æquation par la fraction $\frac{A}{B}$, l'æqua
tion deviendra $yy = \frac{2ABB}{AA}x$, et en reduisant on aura $yy = \frac{2BB}{A}x$; et en supposant
$\frac{2BB}{A} = p$, on aura $yy = px$, et supposant
$p = 1$, on aura $yy = x$

pporizeme

on pourroit tirer l'æquation de la parabolle immediatement de celle du cercle $yy = 2Ax - xx$, en supposant que l'axe du cercle representée par $2A$ est prolongée a l'infini; car alors l'abcysse x du cercle sera infiniment petit par raport au diametre $2A$ et par consequent le terme $-xx$ deviendra nul par raport a $2Ax$, donc l'æquation du cercle deviendra $yy = 2Ax$, et supposant
$2A = p$ elle sera $yy = px$ et supposant $p = 1$, elle
sera $yy = x$

pporizeme

de ce que dans la parabolle, on a toujours yy
$= x$, il suit qu'on a cette proportion $yy . yy :: x : x$
2° donc dans la parabolle les quarres des ordonnees

sont entre eux comme les abcysses, or la quantité yy ayant une raison constante avec x cette raison peut s'exprimer par $p \cdot 1$ ainsi l'on aura $yy \cdot x$ $:: p \cdot 1$

3.º d'où l'on tire l'equation $yy = px$, c'est a cause de cette raison constante que tirant l'equation de la parabolle de l'equation soit de l'ellipse soit du cercle nous avons supposé la quantité $\frac{2BB}{A} = x$, ou la quantité $2A = x$.

Corollaire

Il suit de la que la parabolle croit beaucoup plus selon la longeur que selon la largeur, car sa longeur croit en raison des abcysses et sa largeur en raison des ordonnées or les abcysses de la parabole croissent en plus grande raison que les ordonnées car elles croissent en raison des quarrés des ordonnées

Avertissement

dans l'equation $yy = px$, la quantité p s'appelle le parametre: or le parametre est une ligne qui sert a determiner le raport qui se trouve entre la longeur et la largeur de la parabolle, en determinant celuy qui se

trouve entre son ordonnée et son abcysse, en effet si l'on suppose $x = p$, $= 1$, alors l'equation deviendra $yy = xx = 1$ donc $yy = x = 1$ c'est a dire lorsque l'abcysse est egale au parametre alors l'abcysse et l'ordonnées sont egales, et par consequent la parabolle alors a autant de son yeur et de largeur

9. neuvieme

1° si du point de l'axe ou l'abcysse est egale a l'ordonné, on remonte vers le sommet de la parabolle, on suppose que l'abcysse est le quart du parametre, c'est a dire qu'$x = \frac{p}{4}$ $= \frac{1}{4}$, alors on aura $yy = \frac{1}{4}$ et par consequent $y = \frac{1}{2}$

2° si on suppose l'abcysse $x = \frac{1}{9}$; alors on aura $yy = \frac{1}{9}$ et par consequent $y = \frac{1}{3}$

3° si l'on suppose l'abcysse $x = \frac{1}{16}$, alors on aura $yy = \frac{1}{16}$, et par consequent $yy = \frac{1}{4}$

4° en general en allant du coté du sommet les abcysses x decroissantes comme les nombres $\frac{1}{16}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}$, &c. Les ordonnes seront comme les

quantites $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ &c d'ou l'suit que du costé du sommet les ordonnes sont plus grandes que les abcysses, et par consequent que du costé du sommet La parabolle croit beaucoup plus selon la largeur que selon la longeur

pp oon yeme

ment au contraire si du point de l'axe ou l'abcysse est egale au parametre, on descend du costé opposé au sommet, et

1° si Lon suppose l'abcysse plus grande que le parametre, vy si lon fait $x=4$ $p=4$, alors on aura $yy=4$ et par consequent $y=2$.

2° si lon fait $\frac{x}{16}$, on aura $yy=16$ et par consequent $y=4$

3° si lon fait $x=9$ on aura $yy=9$ et par consequent $y=3$

4° les abcysses x croissantes comme les nombres 4, 9, 16 &c les ordonnes ne croistront que comme les nombre 2, 3, 4 &c d'ou l suit qu'en s'eloignant du sommet Les abcysses sont plus grandes que les ordonnes et par consequent qu'en se loignant du sommet La parabolle croit beaucoup plus en longeur qu'en largeur

La raison de deux phoenomenes si grands s'en voicy dans les deux dernieres propositions est que:

1° Les abcisses du costé du sommet estant comme les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ & Les ordonnes qui sont comme Les racines des abcysses sont par conséquent comme les racines de ces fractions, ou sont comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. ors une fraction racine est plus grande que sa puissance comme nous l'avons dit

2° au contraire Les abcysses estant du costé opposé au sommet comme les nombres entiers 4, 9, 16 & les ordonnes sont toujours comme les racines des abcysses, sont par conséquent comme les racines de ces nombres, ou sont comme 2, 3, 4, & ors dans Les entiers Les racines sont plus petites que Les puissances.

Chapitre 4eme
de L'hyperbolle

nous parlerons 1° de la nature de L'hyperbolle 2° de ses proprietés,

article 1er
De la nature de L'hyperbolle

proposition 1ere

1° si la section faite dans le cone par le plan coupant est parallelle a l'axe du cone, ou du moins

approche de très près de ce parallelysme la section sera, comme nous l'avons dit, une hyperbolle si l'on suppose deux cosnes joints par leurs sommets, et que le plan qui coupe l'un de ces deux cones soit prolongé jusqu'a ce qu'il rencontre l'autre il formera dans cet autre une section semblable a la 1ere

2° ors cette double section faite par un meme plan dans les deux cones, donne 2 courbes MAF d'un costé et LGK de l'autre figure tab y qui sont une seule et meme hyperbolle, laquelle deri ve du cercle ainsi que les autres sections coniques

pproon 2onde

1° en effet si l'une des extremites du cercle s'eloig ne de l'autre a une distance finie, l'on aura une ellypse: si cette meme extremité s'eloigne de l'ex tremité opposeé a l'infini, l'on aura une para bolle: enfin si elle s'en eloigne plus qu'a l'infi ni on aura l'hyperbolle; ors cet eloignement plus qu'infini fait que l'extremité de l'hyper bolle apres s'estre eloigneé a l'infini retourne pour ainsi dire et se rapproche de l'autre extre mité; mais en sens contraire, sçavoir

2° Le prolongement fini du cercle, en donnant l'ellypse fait qu'elle tourne toute sa concavité du costé du centre le prolongement infini du meme diametre en donnant la parabolle, fait que cette courbe ne tourne que la moitié de sa concavité au centre: mais le prolongement plus qu'infini du meme diametre en donnant l'hyperbolle fait que cette courbe oppose sa concavité au centre, et luy tourne sa convexité, en sorte que le centre de l'hyperbolle se trouve entre les deux sommets, placé au point C, figure tab 7 qui est le point ou se coupent les deux lignes HJ et CA qui pour la meme raison sont les axes ou les diametres de l'hyperbolle que l'on appelle aussi diametres conjugues

onzieme

1° c'est de ce prolongement plus qu'infini de l'axe de l'hyperbolle, et de la contreposition de ses sommets, qu'on deduit ce qui regarde la nature et les proprietes de cette courbe

2° de meme que dans le cercle et l'ellypse fig 2 tab 7 les diametres ou les axes sont les lignes AG = A et HJ = B ainsi dans l'hyperbolle

Les diametres ou les axes sont GA = A et HJ = B
3° dans l'hyperbolle comme dans le cercle et l'ellypse l'abcysse AB ou AD s'appelle x et l'ord onné BE ou DF s'appelle y
4° mais dans le cercle et l'ellypse la co-abcysse BG est AG − BA = A − x au contraire dans l'hyperbolle la co-abcysse vg BG et AG + BA = A + x

proon 4eme

1° ce signe plus dont est affecté x dans l'hyperbolle qui differentie l'hyperbolle du cercle et de l'ellypse et mesme de la parabolle, car il faut remarquer que cette quantité x dans le cercle et l'ellypse et negative − x dans la parabolle est x = 0 et dans l'hyperbolle devient positive + x, de sorte qu'elle passe d'une extremité a l'autre, en passant pourtant par le milieu qui est x = 0 durette
2° c'est pour quoy on deduit facilement la notion et les proprietes de l'hyperbole de celle du cercle ou de l'ellypse, en observant seulement cette difference de + x et − x

proon 5eme

1° L'hyperbolle peut se deriver ou du cercle ou de

L'ellypse, ceiron peut rapporter L'hyperbolle soit au cercle soit a l'ellypse selon que les deux axes GA et HJ de l'hyperbolle sont ou egaux fig 3 ou inegaux fig 4 tab 1

2° en effet La longeur de ces deux axes est toujours determinée par 4 quartiers de L'hyperbolle qui s'arrangent autour du centre et luy tourne leur convexité; car de meme que le grand axe GA est terminée par deux hyperbolles conjuguées il faut aussi que le petit axe HJ soit terminée par deux autres hyperbolles conjuguées autrement il seroit indefinie, puisqu'une Ligne droite n'est censé terminée que par la rencontre d'une autre ligne or lorsque les deux axes de l'hyperbolle, elle est appellé circulaire ou equilatére; Lorsqu'ils sont inegaux, on l'appelle elyptique

proposition 6eme

1° La nature de L'hyperbole elyptique se deduit de celle de l'ellypse: en effet La principale proprieté de l'ellypse est que $D \cdot AA :: yy : Ax - xx$ d'ou l'on conclut $\frac{A}{D}\, yy = Ax - xx$; pareillement on aura dans L'hyperbolle

BB. AA :: yy. Ax + xx d'ou lon conclu
ra $\frac{AA}{B}$ yy = Ax + xx, et c'est l'equation de
l'hyperbolle ellyptique qui ne differe que celle
de l'ellypse ~~ep~~ que par la diversité des deux signes
+ et —

2° La nature de l'hyperbole circulaire se deduit
de celle du cercle car de meme que dans le cercle
l'equation $\frac{AA}{BB}$ yy = Ax — xx devient yy
= Ax — xx parceque dans le cercle A = B ai
nsy dans l'hyperbolle circulaire l'equation $\frac{AA}{BB}$
yy = Ax + xx devient yy = A^x + x parceque
dans l'hyperbolle circulaire A = B, c'est a dire
parceque ces diametres conjugues sont egaux

~~paragraphe second~~
Article 2eme
Des proprietes de l'hyperbolle
par rapport a son axe

1° L'hyperbolle peut estre considerée de deux manieres
ou par raport a son axe ou par raport a
son assymptote
2° si on considere l'hyperbolle par raport a son
axe alors elle est le lieu geometrique c'est a dire,

Le terme des ordonnes qui croissent de facon que comme dans l'ellypse les quarres des ordonnes soyent aurectangle des abcysses comme le quarré du diametre parallelle aux ordonnes est au quarrés de l'autre diametre conjugué; ce qui s'exprime comme nous l'avons dit cy dessus par la proportion B·A :: yy·Ax+xx d'ou nous avons tirés l'equation $\frac{A}{BB}yy=Ax+xx$ qui caracterisent l'hyperbolle reportée a son axe interieure

proposition 2onde

mais si l'on reporte l'hyperbolle a son assimptote CKIM fig 15 tab B, l'hyperbolle comme nous l'allons voir sera le lieu geometrique des ordonnes KB, IR, MV qui decroitrent en raison reciproque des abcysses CK, CI, CM; c'est a dire qu'appellant CK et KB qui sont des grandeurs connues et constantes a b; de plus nommant l'abcysse CI ou CM ou x et l'ordonné IR, ou MV, ou y. on aura toujours La proportion B·y :: x·a, d'ou l'on tire

$xy = ab$ qui est l'equation de l'hyperbolle raportée a son atsymptote

pproonzeme

en effet dans l'hyperbolle les ordonnée RN FS, GT &c a la symptote CN; ST &c croissent en raison reciproque des abcysses c'estadire decroissent a mesure que l'asymptote se prolonge. d'ou il suit que les branches de l'hyperbolles s'approchent toujours de plus en plus de leur atsymptote sans jamais se confondre avec elle si ce n'est qu'a l'infini pour le prouver

1° supposons $CB = a$, $BN = b$, $CD = x$, a cause des triangles semblables CBN, CDS; on aura $a . b :: x . DS = \frac{bx}{a}$

2° on a d'ailleur par la proprieté de l'hyperbolle $\overline{DF}^2 . BD \times DA :: bb . aa$ ou ce qui est la meme chose on a $yy . xx - aa :: bb . aa$, donc $yy = \frac{bb}{aa} x - bb$ ors

3° $DS = \frac{bx}{a}$ et $\overline{DS}^2 = \frac{bb}{a} xx$, mais la quantité $\frac{bb}{a} xx$ est plus grande que $\frac{bb}{a}$, $xx - bb$ donc DS est plus grand que DF.

4° de ce que $DS = \frac{bx}{a}$ il s'en suit que $FS = \frac{b}{}$

$\frac{x}{a}$ — y, et que FJ = FD + DJ sera par consequent = $\frac{Bx}{a}$ + y, donc FS × FJ = $\frac{bbxx}{a}$ — yy = $\frac{bbxx}{a}$ — $\frac{bbxx}{a}$ + bb = bb ; donc le rectangle FS × FJ ou TG × GM est toujours egal au quarré du petit axe

3° ors ce rectangle ne peut pas estre toujours le meme, que les ordonnées exterieurs BN, FJ n'allent pas toujours en decroissant parce quelle sont une des racines de ce rectangle dont l'autre racine sont les lignes FJ ou GM ou ce qui vont toujours en croissant a mesure que les abcysses augmentent donc &c

Corollaire

1° c'est pourquoy Les abcysses de l'hyperbolle prises sur l'assymptote croissant toujours comme les nombre 1, 2, 3, 4, 5, 6, les ordonnées a l'assymptote decroitront toujours comme les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c

2° cette serie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c s'appelle La serie harmonique parce que si l'on divise une corde en parties $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c on trouvera dans cette serie tous les sons harmoniques possibles.

Livre 3eme
pratique de la geometrie composeé

La partique de la geometrie composeé, est renfermeé dans la description des sections coniques, cette description est ou organique ou geometrique

Section 1ere
De La description organique Des coniques

nous parlerons, 1° de la description organique du cercle et de l'ellypse 2° de celle de la parabolle 3° de celle de l'hyperbolle

Chapitre 1er
Description organique du cercle et de l'ellypse

propon 1ere

1° La description organique des figures est celle qui se fait par le moyen des instruments que l'on appelle ordinairement organes tels sont les instruments de mathematiques

2° Le plus simple de tous les instrument organiques

organiques est le compas dont on se sert pour
decrire le cercle: La description du cercle n'a
rien que de simple et de facile, il se decrit d'un
mouvement uniforme et continu, de la meme
ouverture de compas du meme centre, et conser
vant toujours le meme rayon.

3° Il n'en est pas de meme de l'ellypse, il n'est point
de compas pour decrir l'ellipse d'un mouvement
continu comme le cercle; c'est pourquoy on a recour
a une autre methode pour decrir l'ellypse

pratique

1° on determine deux centres, scavoir F et f fig 6 (ay
(que l'on appelle foyers de l'ellypse) a telle dist
ance que l'on voudra l'un de l'autre; et l'on y pla
nte deux stilets

2° on prend un fil de telle longeur que l'on voudra
ny de la longeur {B, dont on fait tenir les
extremites au stilet

3° par le moyen d'un stilet ou d'une pointe, on tend
le fil au point A, ou G ou B et l'on fait courir
Le stilet le long du fil, en le tenant toujours ten
du; alors ce stilet decrit et trace d'un coté La
courbe l A G B moitie de l'ellypse, et mettant
Le fil de l'autre coté le stilet qui decrira

de la meme facon l'autre moitie ED B de l'ellypse entiere EADB

proposition 3eme

1° La plus grande largeur de l'ellypse est au point AD, parceque le fil etant divise au point A en deux parties egales AF, et Af, le point A est a la plus grande distance qu'il puisse estre de l'axe EB

2° pareillement la plus grande longeur de l'ellypse est au point EB, parcequ'ils sont eloignes de toute la longeur du fil

3° les deux foyers F, f, doivent estre regardes comme deux centre dont l'eloignement rend l'ellypse plus allongee, et la proximite la rend plus circulaire, en sorte que s'ils se reunissoient en un meme point C, l'ellypse deviendroit un cercle

proposition 4eme

1° La somme des distances d'un point quelquonque de la circumference ry A ou G des deux foyers est toujours egal au grand aixe EB, car elle est egale a FA + Af, ou FG + Gf = EB, comme il clair

2° si par le point G fig 1 tab 1 on mene une tangeante MCN. Les geometre prouvent que l'angle FGM = FGN. d'ou l'on conclut

que si un rayon de lumiere partant du foyer F tomboit sur le point G ou autre point quelquonque de l'ellypse il se reflechiroit au foyer F, c'est pour cette raison que les deux centres F f s'appellent foyers.

Chapitre second

Description organique de la parabolle

Proposition 1ere

1° La parabolle etant un ellypse allongée a l'infini, ces foyers sont infiniment eloignés l'un de l'autre c'est pourquoy si on vouloit decrire une parabolle de la meme maniere que l'on a decrit une ellypse, il faudroit un fil d'une longeur infinie

2° il est a remarquer que cet ellypse infiniment allongeé la partie A F, ou G F fig 6 table 7 du fil F A f, ou F G f ne couperoit point l'axe, si ce n'est a une distance infinie, et par consequent que cette partie doit toujours demeure paralelle a l'axe

Proposition 2onde

1° C'est pourquoy pour decrire une parabolle

on se sert de deux regle l'une droite et immobile AB fig 8 tab 7 l'et l'autre faite en fa[illegible] di equier CDE et mobile; on attache le fil d'une part au foyer F, et de l'autre on le tient assujeti a la regle mobile par le moyen d'un stilet
2° si tenant le fil toujours tendu et assujeti par le moy en a la regle mobile CDE, on fait mouvoir la regle en l'eloignant de l'axe, et la faisant couler selon la direction DC pour la tenir toujours paralelle a cet axe alors le stilet tracera une ellypse infinie ou une parabolle

onzieme

La ligne BA s'appelle la directrice, le point F s'appelle le foyer de la parabolle or en supposant que le sommet de la parabolle soit a egale distance du foyer et de la directrice, il s'ensuivra que chaque point de la parabolle sera aussy a egale distance du foyer et de la directrice parceque le point G du fil GE quittera la parabolle, s'e loigne en meme temps egalement et de la directri ce, et du foyer, parcequ'il s'eloigne de l'un et de l'autre a chaque instant d'une quantité infiniment petite

Corollaire 1er

puisque la parabolle n'est qu'une ellypse infiniment allongée, il s'ensuit que les rayons

qui partant du foyer de la parabolle tomberoit sur un point quelquonque de la parabolle, se reflechiroit parallellement a l'axe; car les rayons ne peuvent se reunir que dans l'autre foyer infiniment distant; donc il ne rencontreroit l'axe qu'à une distance infinie, donc il seroit paralelle et a l'axe et entre eux.

Corollaire 2ème

c'est pourquoy
1° les rayons de lumiere qui tomberoient parallellement sur un miroir parabollique doivent tous se reunir au foyer F de la parabolle.
2° si on placoit une lumiere dans le foyer d'un miroir parabollique tous les rayons qui en partiroient seroient reflechis par la surface parabollique tous parallellement et formeroient une espece de cylendre lumineux

Chapitre 3ème
Description organique de l'hyperbolle
premiere

1° L'hyperbolle est un ellipse allongée plus que l'infini, or cette allongement plus qu'a l'infini fait

retourner en sens contraire pour ainsi dire, Le sommet de L'hyperbolle que l'un de ces foyers etant au point f L'autre foyer se vient placer par contraposition au point f

2° il suit de la que la reygle D Lfig 8 tab. qui etoit paralelle a l'axe, parce que son extremité L ~~fixée au foyer~~ repondoit a l'autre foyer de la parabolle infiniment eloignée du point F doit se replier pour que son extremité L soit fixée au foyer f de L'hyperbolle fig 9

3° c'est pourquoy dans la description de L'hyperbolle on se sert de deux reygle L'une F L pour tenir le fil, et l'autre f L pour le diriger fig 9, de façon que elle se croisse au point L, et faisant mouvoir ce point L par le moyen d'un stilet et allongeant uniformement Les deux reygles a chaque instant, on decrit L'hyperbolle

en effet La reygle F L est ce meme fil qui

1° dans la description de l'ellypse tenoit ses deux extremites au deux foyers F, f, fig 6 et avoit une longeur fixe et determinée,

2° dans La description de La parabolle est devenu infiniment Long, et par cette raison paralelle a l'axe.

3° dans la description de l'hyperbolle est devenu plus que infiniment long, et par cette raison a cessé d'estre parallelle a l'axe et s'est inclinée en sens contraire

4° de sorte que le fil pour decrir l'ellypse la parabolle, et l'hyperbolle, est passé de l'etat d'inclinaison, a celuy du parallelysme et de celuy cy et l'etat d'inclinaison en sens contraire, passant ainsy d'une extremité a l'autre, en passant pour ainsy parle milieu

Section 2onde
Description geometrique des sections coniques
premiere

1° Les descriptions que nous allons donner sont apprelles geometriques, et elles consistent a decrire la courbe non d'un mouvement continu, mais par une operation discrete et disjointe scavoir en assignant un nombre quelquonque de points plus ou moins de la courbe

2° n° pour decrire de cette 2onde maniere une ellypse dans laquelle le rapport du grand axe au petit est donné et connu il faut decrire un cercle dont le diametre soit egal au grand axe de l'ellypse proposé alors ayant tirés les ordonnes au

il faut les diviser chacunes dans la raison donnée du grand axe au petit axe au point vy K H F fig 16 feb et les points de division seront autant de points de la courbe proposée

pption 2ourde

1° La methode la plus generale pour decrire geometriquement une courbe est de se servir de l'equation de la courbe en decrivant des coordonnées qui soyent dans la raison et le rapport qui est exprimé dans l'equation de la courbe que l'on veut decrire c'est ce que l'on appelle trouver les lieux geometriques

2° En effet que l'on tire une ligne indefinie A O fig 10 fab 8 et qui on la divise en parties egales au point C D E F &; cette ligne s'appelle axe, ou ligne des abcysses; et les portions A C, A D, A E, A F, &a s'appellent les abcysses; et le point A s'appelle l'origine de l'axe ou l'origine des abcysses

3° si de chaque point de division C, D, &c on eleve des lignes droittes paralelles entre elles, soit egales, soit inegales, soit perpendiculaires, soit inclinées, sur la ligne des abcysses (pourveu cependant qu'elles fassent toutes avec elle un meme angle) ces lignes s'appellent les ordonnées, et la ligne qui passe par les extremités A, O, H &c des ordonnées laquelle est droitte ou courbe selon le rapport qui se trouve entre les ordonnées et les abcysses, s'appelle le lieu geometrique

1° c'est donc de la raison et du raport qui se trouve entre les ordonnes et les abcysses correspondantes que depend la nature de la ligne soit droite soit courbe qui passe par les extremites des ordonnes ou qui est le lieu geometrique des ordonnes

2° si le raport de ces ordonnes est simple c'est si l'on a supposition AB . AC :: BG . CH fig 11 tab 8, et AB . AD :: BG . DJ et ainsi de suitte; en un mot si les coordonnes x, y sont toujours entre elles dans une raison constante AB, ou si l'on a toujours x . y :: a . b . alors la ligne AL, qui est le lieu geometrique de toutes les ordonnees, BG, CH &c est la ligne la plus simple de toutes et est par consequent droite; ce lieu geometrique s'appelle par les geometres le lieu de la ligne droite ou le lieu du triangle parce que la ligne AL fig 11 forme un triangle avec la ligne des abcysses et des ordonnes

3° c'est pourquoy pour decrire geometriquement un triangle, apres avoir mené une ligne des abcysses et l'avoir divisée en un nombre quel quonque de parties, il n'y a qu'a elever de chaque point de division des ordonnes qui croissent dans la meme raison que les abcisses, c'est a dire,

cest a dire ou dans la raison des nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c. ou dans La raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. ou &c. selon que les abcisses croissent ou dans l'une ou dans l'autre raison ou &c.

4eme

1° si les ordonnees croissent en raison simple, ou comme des nombres dont la progression seroit unif orme est simple, alors le lieu geometrique de ces ordonnees sera, comme nous venons de le dire, La ligne droitte ou le triangle

2° mais si les ordonnees croissent en raison composée c'est a dire comme des nombres dont la progression seroit non pas simple, mais composée, scavoir ou double ou triple ou &c. cy comme les nombres 1, 4, 9, 16, &c. ou comme les nombres 1, 8, 27, &c. ou comme &c. alors le lieu geometrique des ordonnees sera une ligne courbe

3° si les ordonnees croissent en raison doublée, ou comme les quarres 1, 4, 9, 16, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c. qui representent les abcisses, alors le lieu geometrique sera une parabolle: c'est pourquoy pour decrire une parabolle il n'y a qu'a mener une Ligne AO dans laquelle les abcisses AC, AD, AE &c fig. fab 8 croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c et des points de division elever des ordonnees CG,

G H L J & qui croissent comme les quarrés de ces ordonnes ou comme les quarres des nombres naturels et faire passer une ligne par les extremités de ces ordonnes, et l'on aura une parabolle

Sixieme

1° Lorsque pour avoir la parabolle nous avons fait des absisses qui croissent dans la raison simple 1,2,3,4 & et des ordonnes qui croissent dans la raison doublée 1,4,9,16, & nous avons consideré la parabolle A G H J & du costé de sa concavité

2° mais si nous faisons les absisses AB, AC, AD &. fig 13 tab 8 qui soyent dans la raison doublée 1,4, 9, 16 &, alors les ordonnes BE, CF, DG croitront dans la raison simple 1,2,3,4, & parceque les ordonnes sont toujours comme les racines des absisses et dans ce cas la parabolle sera considerée du costé de sa convexité ou ce qui est la meme chose l'axe A H de la parabolle se trouvera placé du coté de la convexité: en effet si dans cet axe A H, nous prenons les absisses AK, AJ, A H qui croissent uniformement ou comme 1,2,3,4 & nous aurons les ordonnes K E = AB, J F = A C, H G = A D, qui croissent comme les quarres des absisses, ou comme les nombres 1,4,9,16 &, or ces ordonnes K E, J F, H G, sont toutes terminées a la convexité de la parabolle et par cette raison cette courbe est ditte estre alors considerée du coté de sa convexité

3° enfin parce qui a esté dit comment on doit r

decrire une parabolle soit qu'on la considere du costé de sa concavité, soit qu'on la considere du costé de sa convexité

Hypothese

1° L'hyperbolle peut estre raportée ou a son axe ou a son attymptote

2° pour decrire une hyperbolle en la considerant par raport a son axe ou plustost a ses axes, il faut 1° determiner et assigner les deux axes ou diametres conjugués 2° a l'extremité du grand il faut prendre des absisses qui croissent en raison simple des nombres 1,2,3,4,5 3° a l'extremité de chaque abcysse il faut elever des ordonnes qui soyent tels que le quarré de chaque ordonné soit au rectangle de ces absisses comme le quarré du petit axe (scavoir de l'axe qui est paralel a l'ord. on a) est au quarré de l'autre axe, et le lieu geometrique de ces ordonnes sera l'hyperbolle, comme il est evident

3° pour decrire une hyperbolle en la considerant par raport a son attymptote, il n'y a qu'a tirer la ligne indefinie CLDF fig tab 7, dans cette ligne prendre les abcisses CB, CD, CF &c qui soyent entr'elles comme les nombres 1,2,3,4, &c et enfin elever les ordonnes BA, DE, FG &c qui decroissent en raison reciproque des abscysses ou qui decroissent comme les fractions 1, 1/2, 1/3, 1/4 &c et alors le lieu geometrique de ces ordonnes sera l'hyperbolle AEGH comme il est evident

Corollaire

apres ce qui a eté dit il n'est pas difficile de decrire le cercle et l'ellypse, car

1° pour decrire le cercle il n'y a qu'a elever sur la ligne des abscisses des ordonnes tels que leurs quarrés soyent egaux au rectangle des abcisses

2° peur decrire lellypse il ny a qu'a elever sur la ligne des absisses des ordonnees qui soyent tels que leurs quarres soit proportionnelles au rectangle des abscysses corresspondantes

Fin de la Geometrie Sfarta

paris ce 16 10cembre 1748
Signé Louis casimir
parent de fougeres etudiant en philosophie au college Royal de navarre et demeurant a la communauté des pretres dudit college

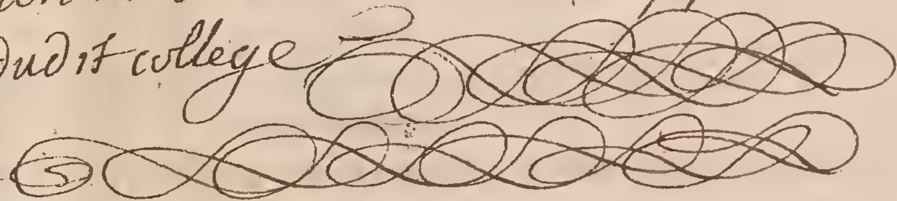
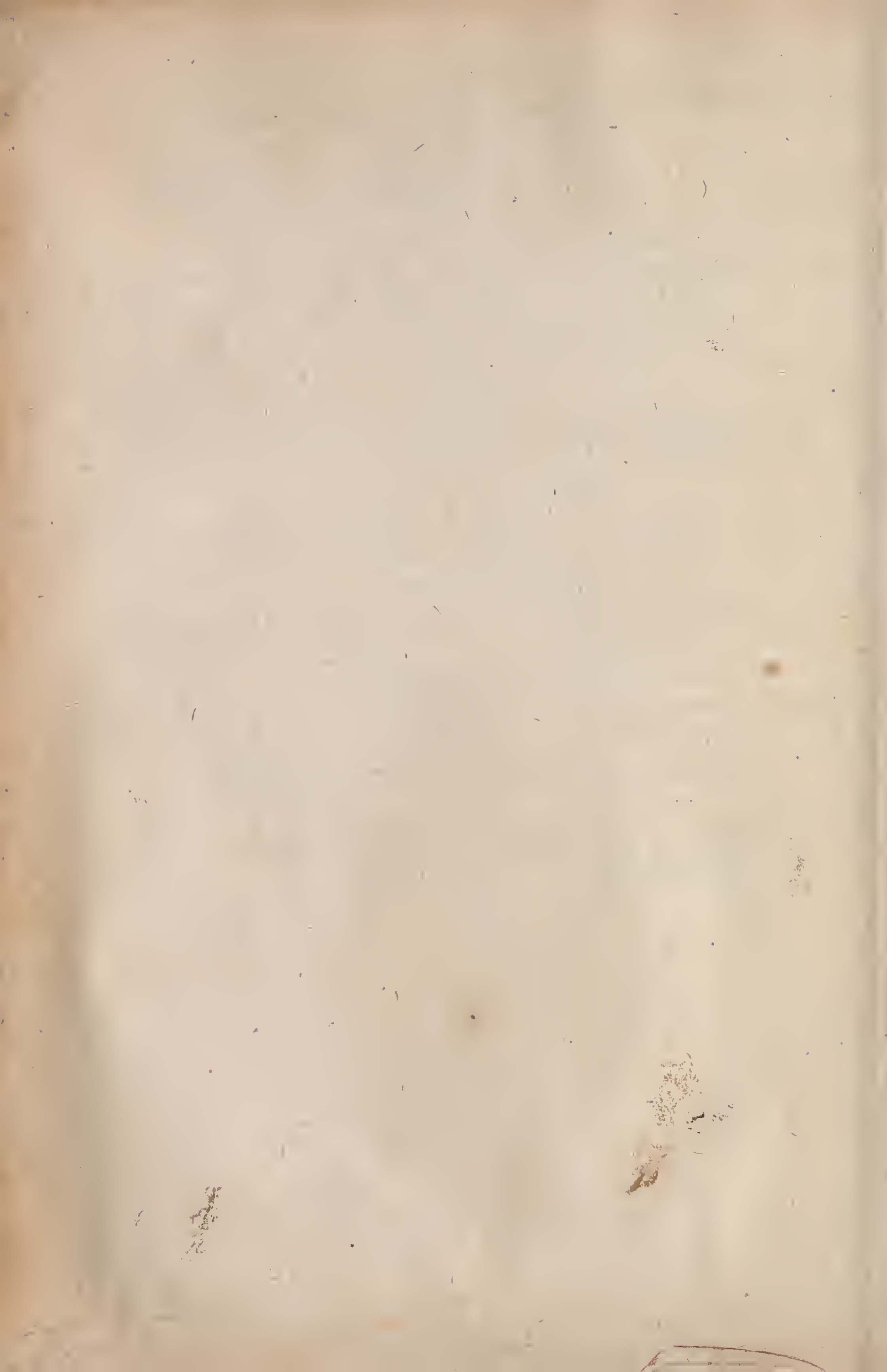


table des matieres Contenues dans ce traité, dont est auteur Monsieur De Mazeas Celebre professeur au college de navarre a Paris.

Fin de la Table des matieres
contenues dans ce traité



Tab. 1.a

Fig. 1.

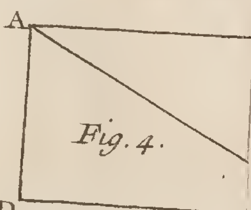
D



A



D



D

Tab. 1.[a]

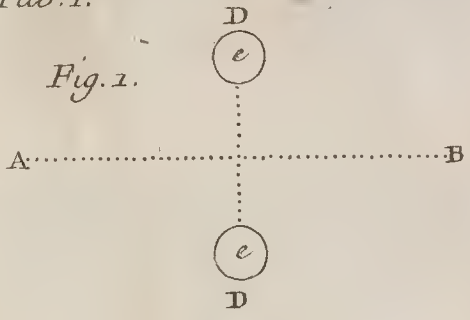


Fig. 1.

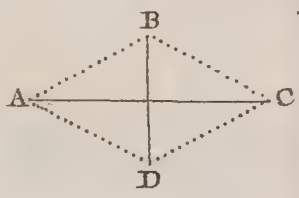


Fig. 2.

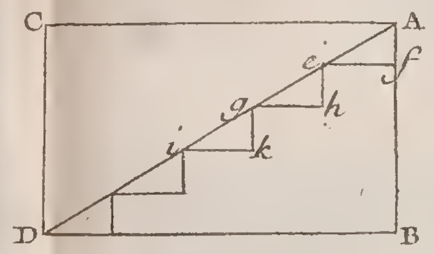


Fig. 3.

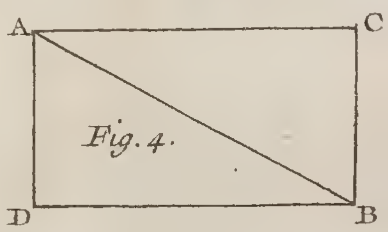


Fig. 4.

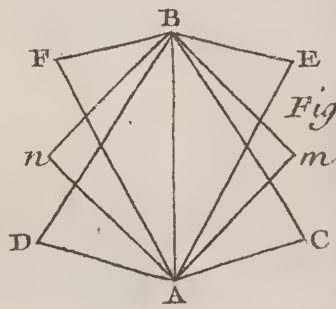


Fig. 5.

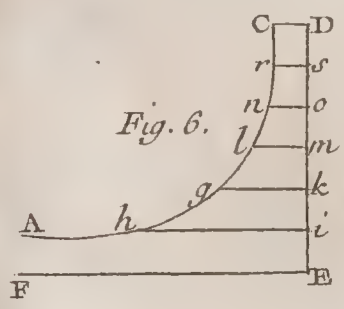


Fig. 6.

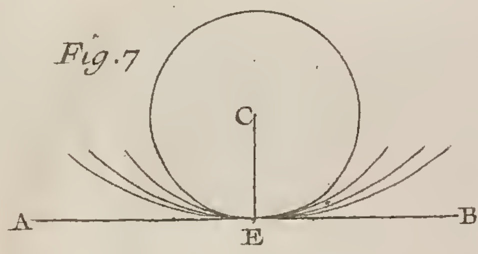


Fig. 7

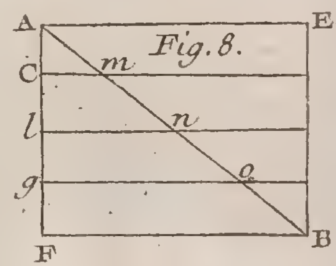


Fig. 8.

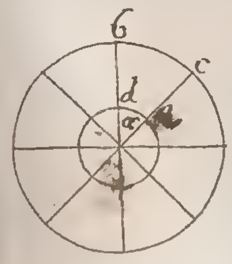


Fig. 9.

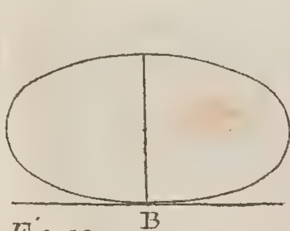


Fig. 10.

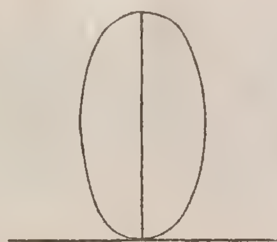


Fig. 10.

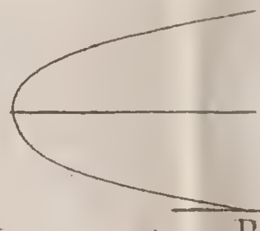


Fig. 10.

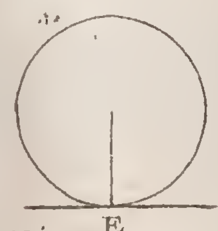
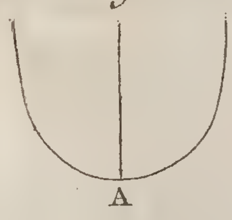


Fig. 10.

Fig. 10.



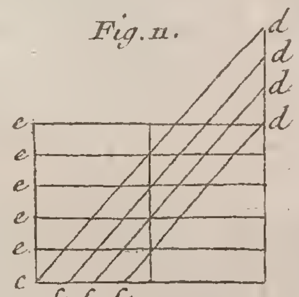


Fig. 11.

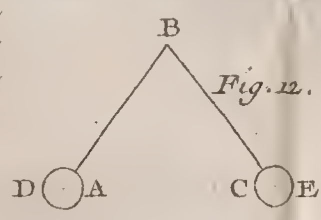


Fig. 12.

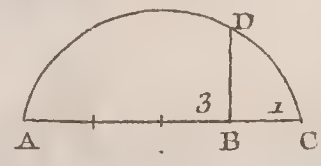


Fig. 13.

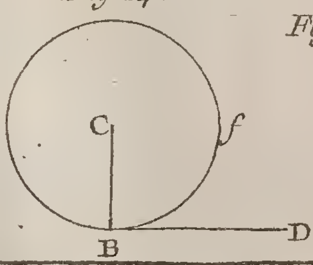


Fig. 14.

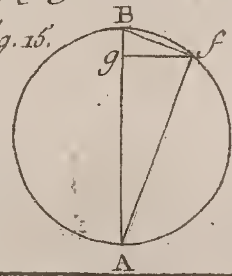


Fig. 15.

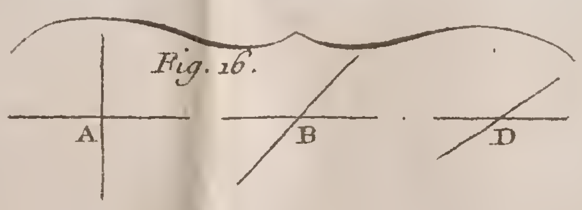


Fig. 16.

a Paris chés Hecquet Place Cambray a l'Image S. Maur.

Tab. 2ª

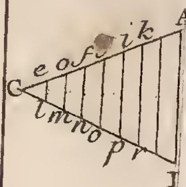


Fig. 4

A

Tab. 2ª

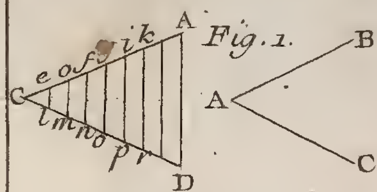


Fig. 1.

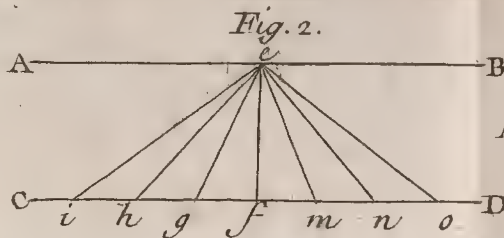


Fig. 2.

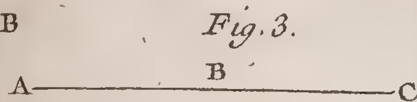


Fig. 3.

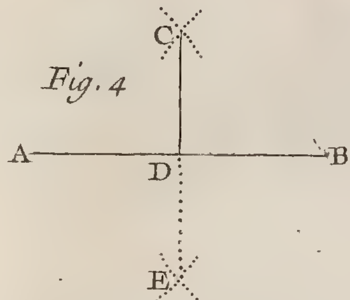


Fig. 4

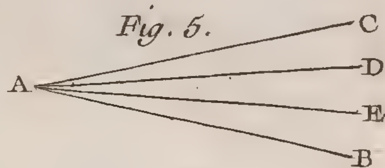


Fig. 5.

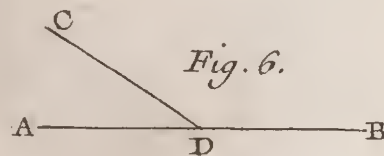


Fig. 6.

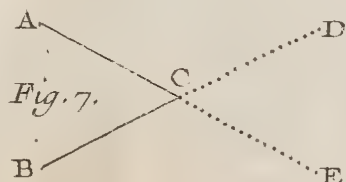


Fig. 7.

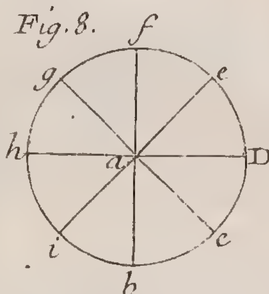


Fig. 8.

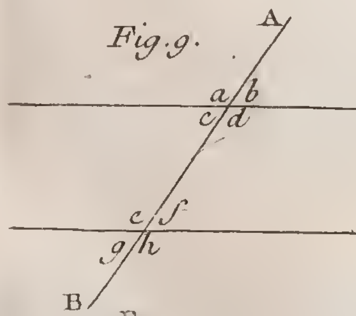


Fig. 9.

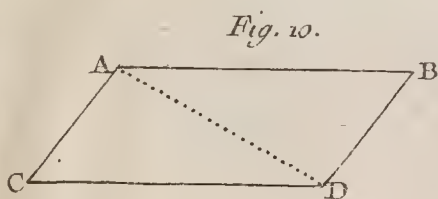


Fig. 10.

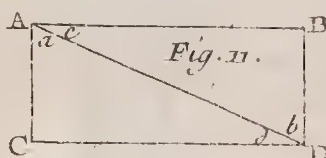


Fig. 11.

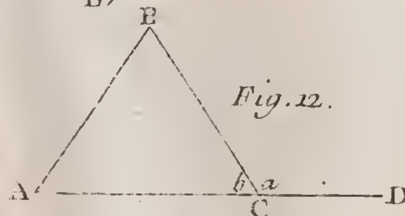


Fig. 12.

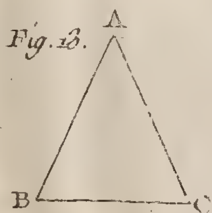


Fig. 13.

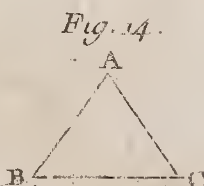


Fig. 14.

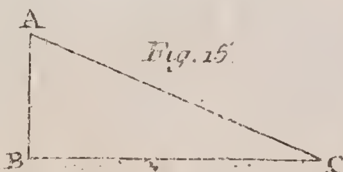


Fig. 15.

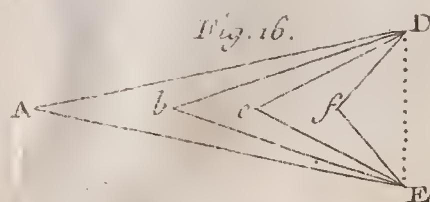


Fig. 16.

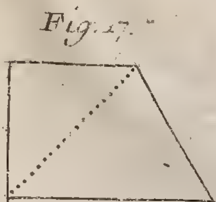
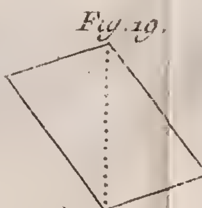
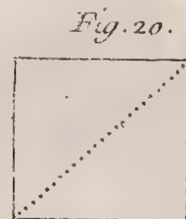
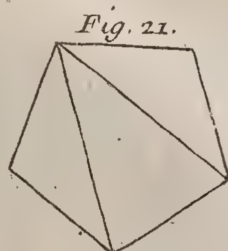

Fig. 17.


Fig. 18.


Fig. 19.


Fig. 20.


Fig. 21.

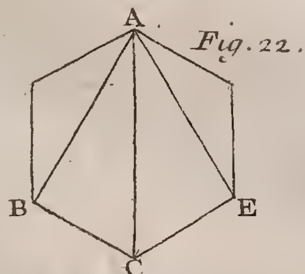


Fig. 22.

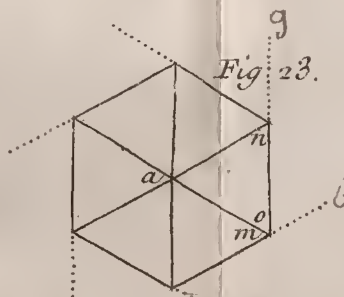


Fig. 23.

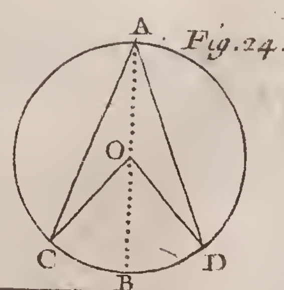


Fig. 24.

a Paris Chés Hecquet Place Cambray a l'Image S. Maur.

Tab. 3.

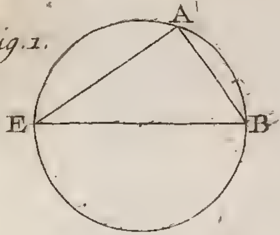
Fig. 1.

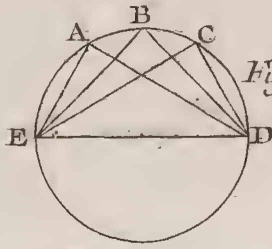
E

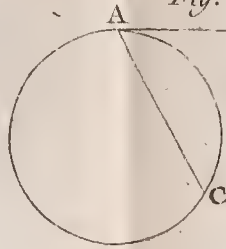
Fig.

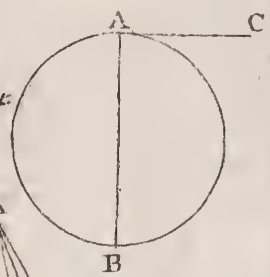
B

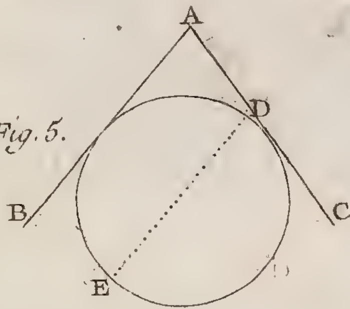
Tab. 3.

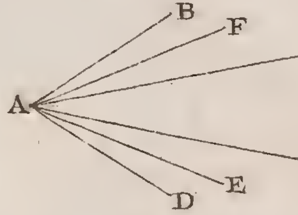


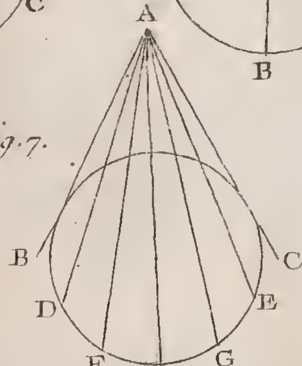


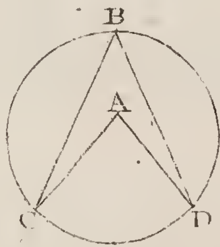


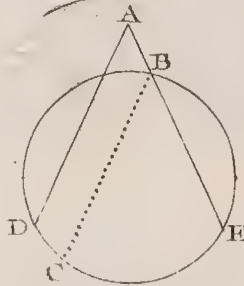


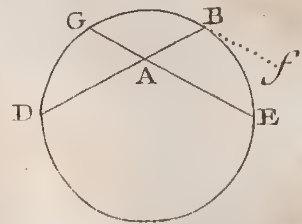


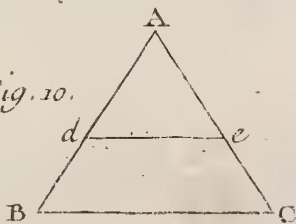


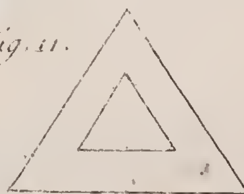


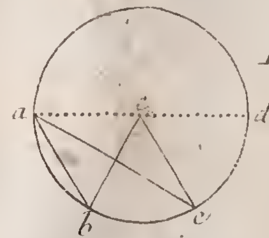


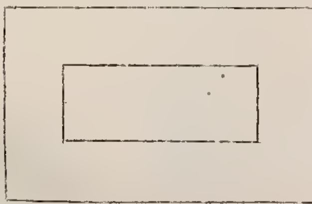


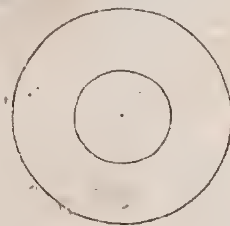


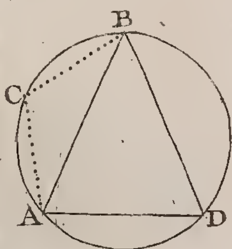


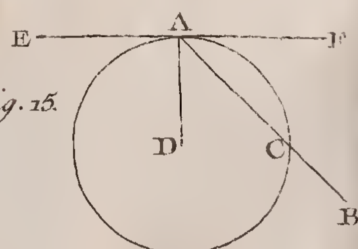






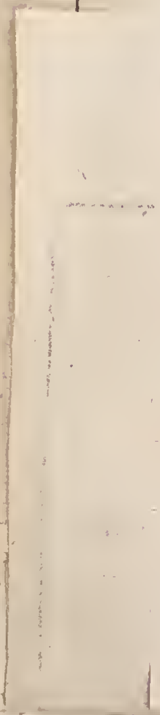








à Paris Chés Hecquet Place Cambray à l'Image S. Maur.



Tab
Fig. 1

Tab. 4.

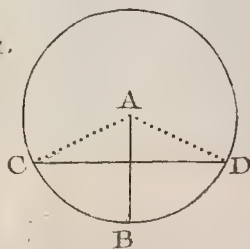


Fig. 1.

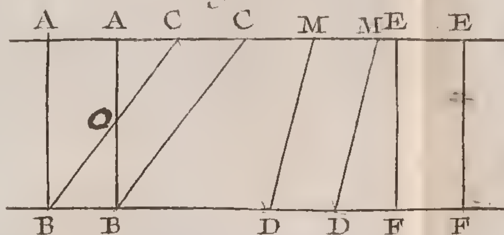


Fig. 2.

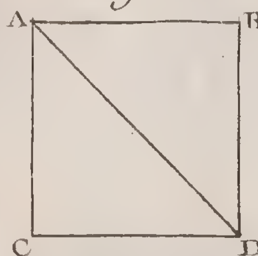


Fig. 3.

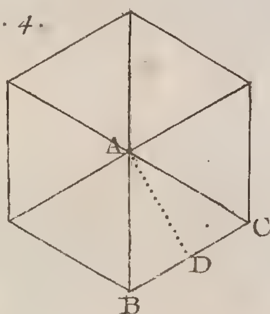
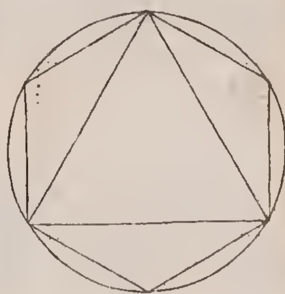


Fig. 4.


Fig. 5.

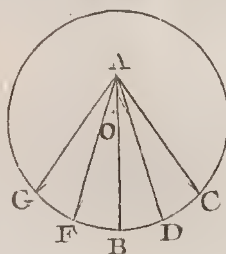


Fig. 6.

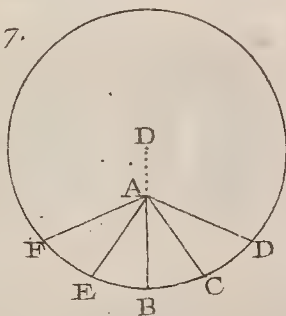


Fig. 7.

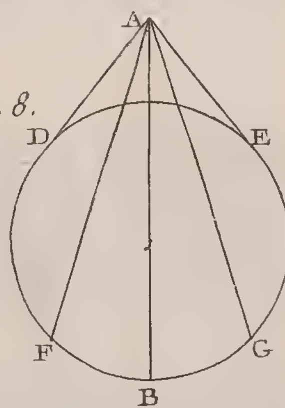


Fig. 8.

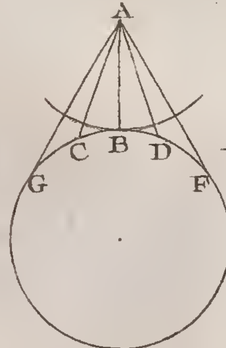
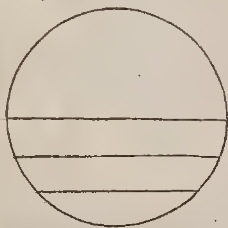


Fig. 9.


Fig. 10.

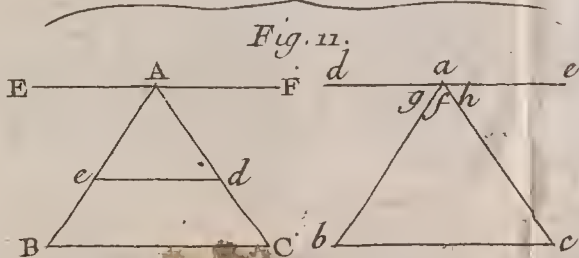


Fig. 11.

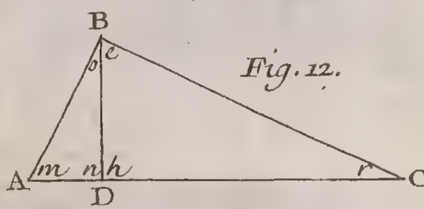


Fig. 12.

Fig. 13

B
A D C

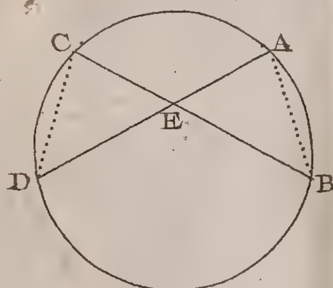


Fig. 14.

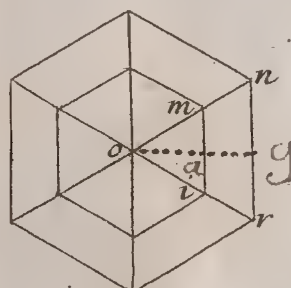
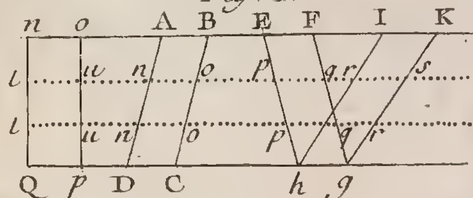
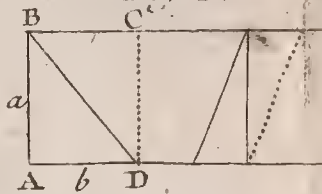


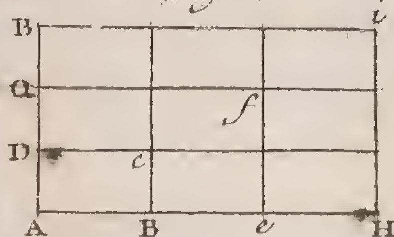
Fig. 15.

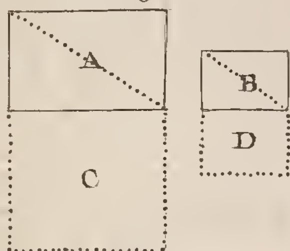
à Paris Chés Hecquet place Cambray à l'Image S. Maur.

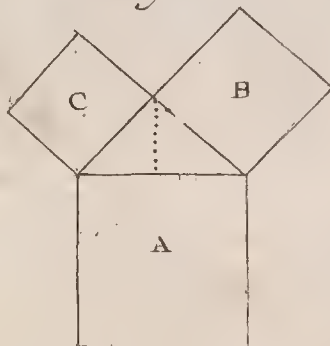
Tab. 5.

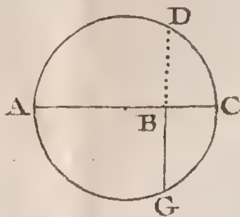


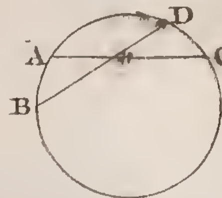


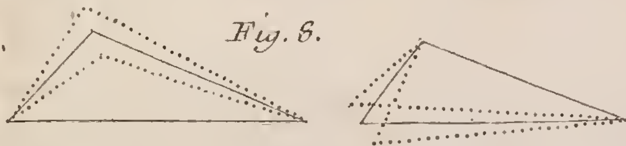


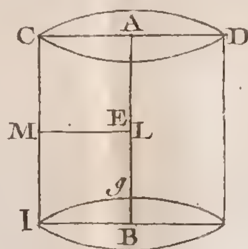


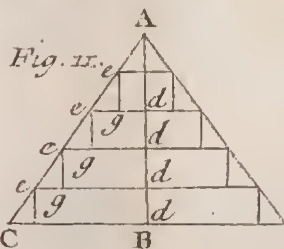


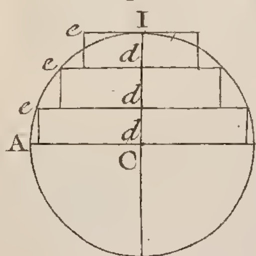


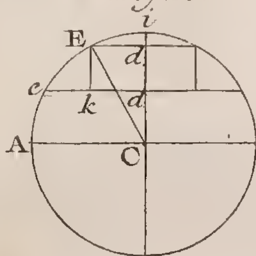


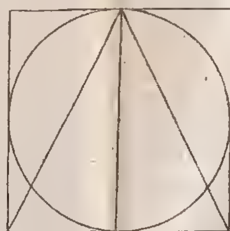


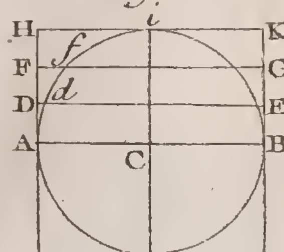


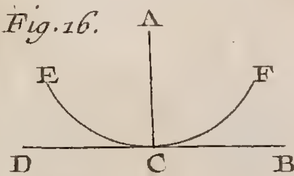


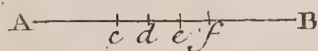


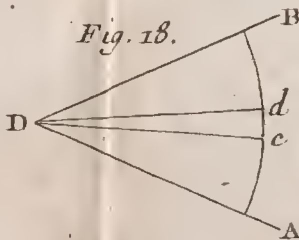


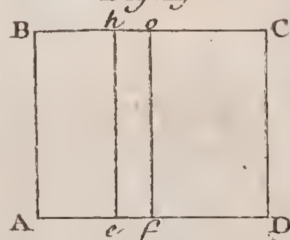


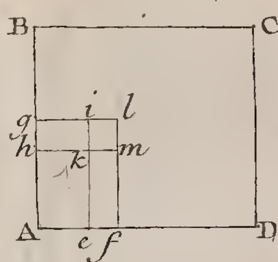


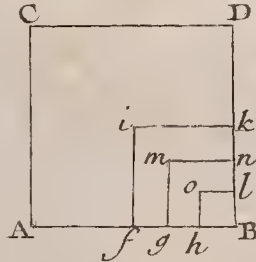


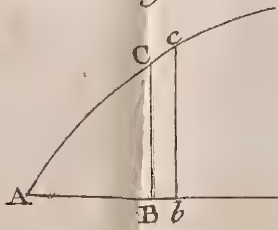


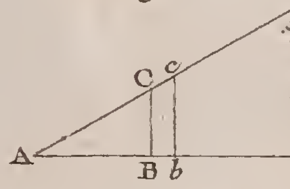






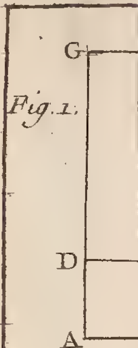


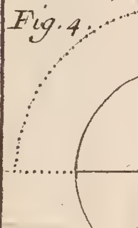




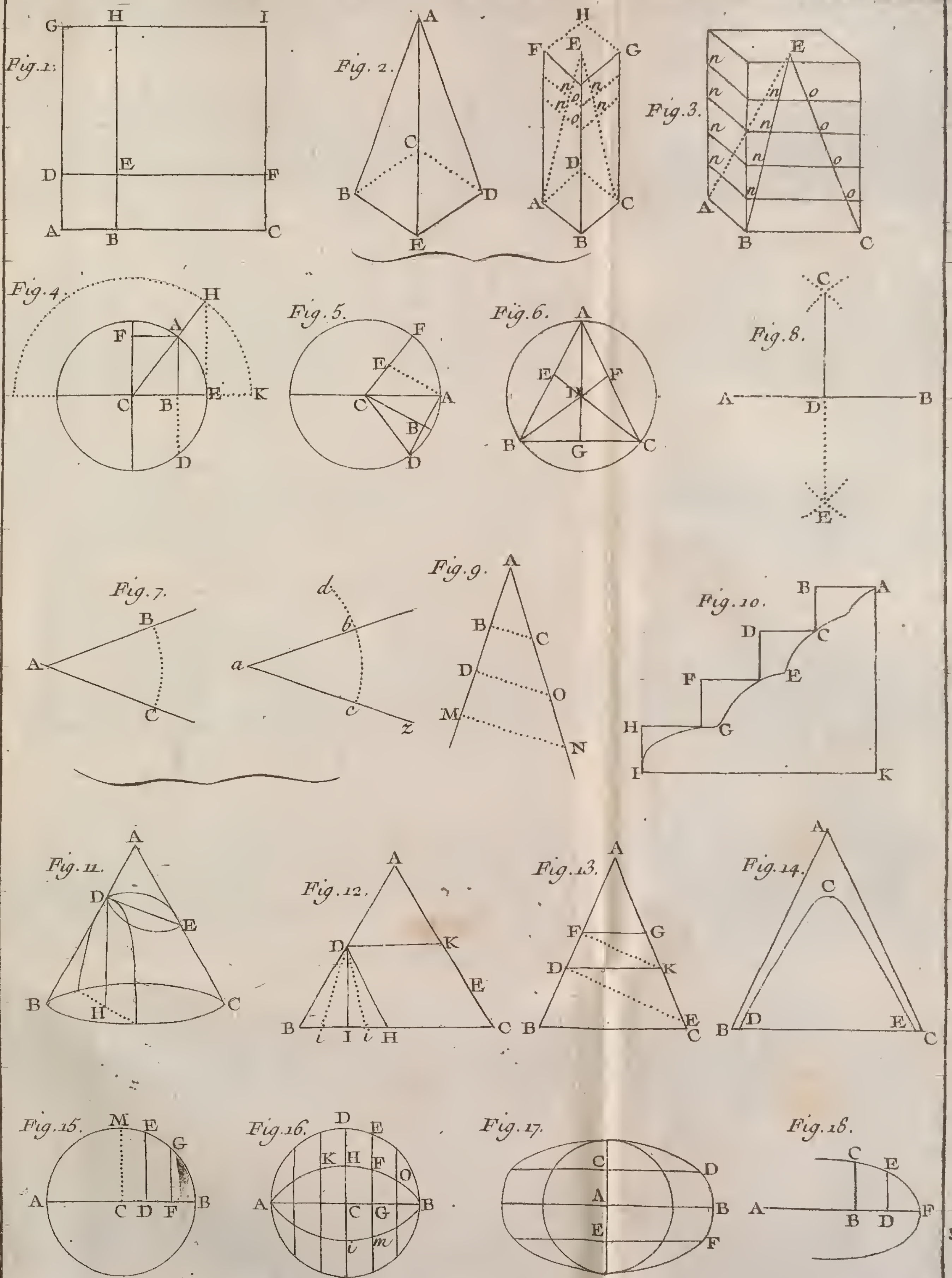
à Paris Chés Hecquet place Cambray à l'Image S. Maur.

Tab. 6.



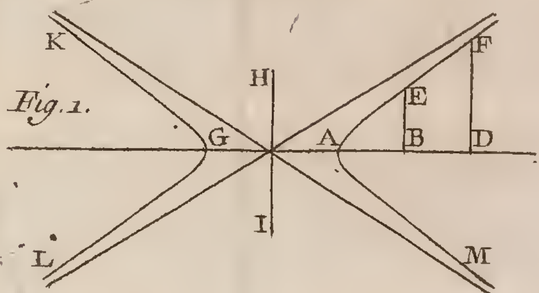


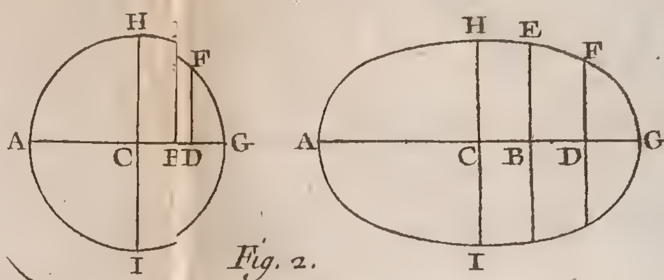
Tab. 6.

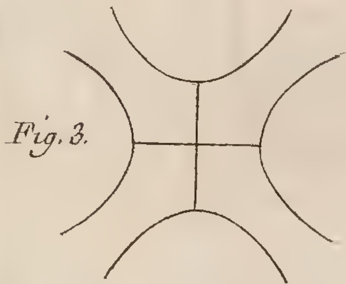


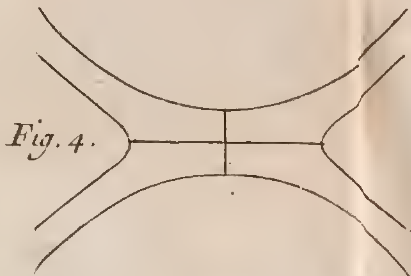
à Paris chés Hecquet Place Cambray à l'Image S. Maur.

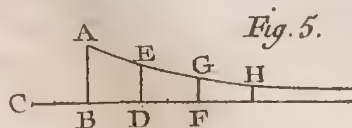


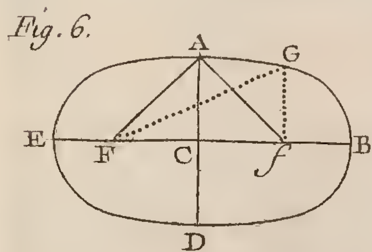


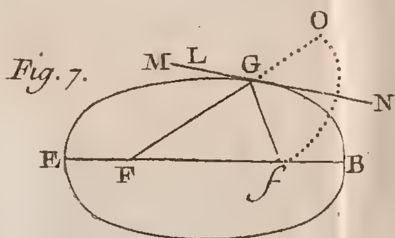


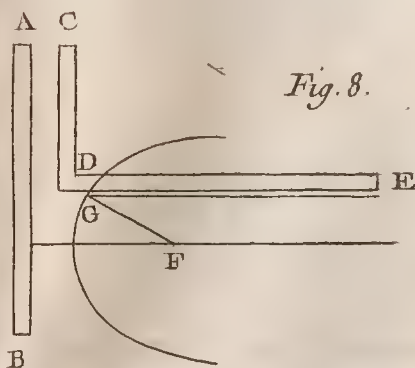


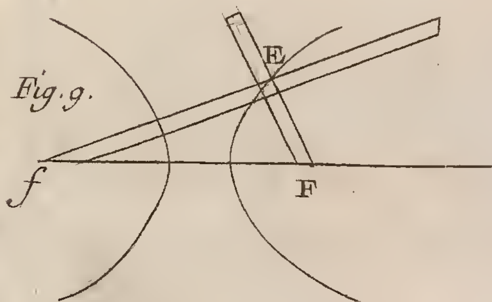


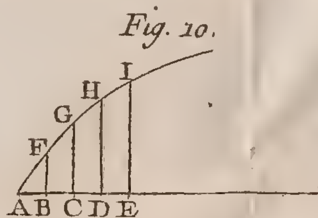


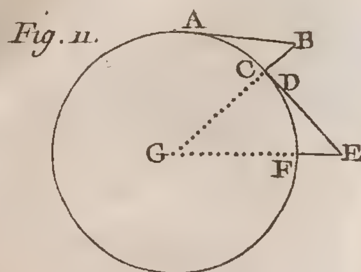


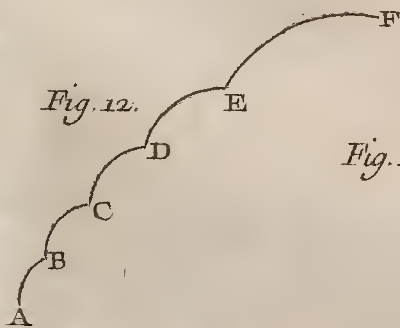


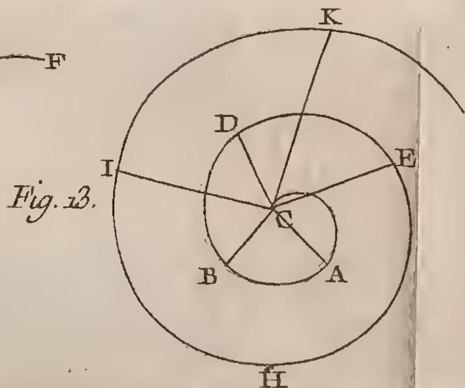


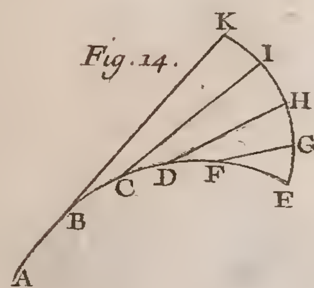












à Paris chés Hecquet place de Cambray à l'Image S. Maur.

Tab.

fig.

Tab. 8.

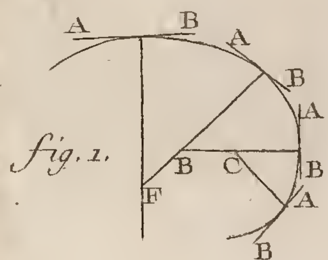


fig. 1.

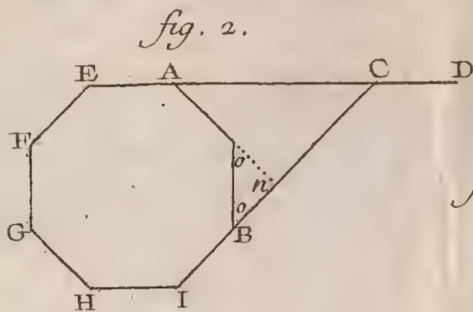


fig. 2.

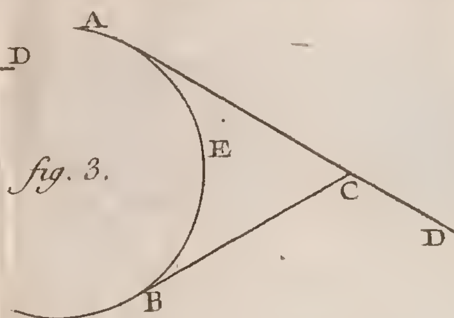


fig. 3.

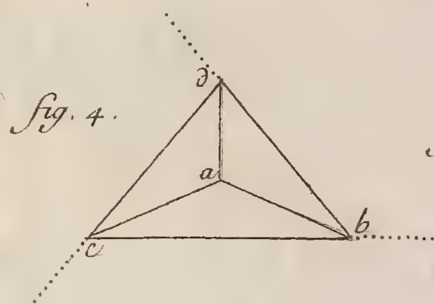


fig. 4.

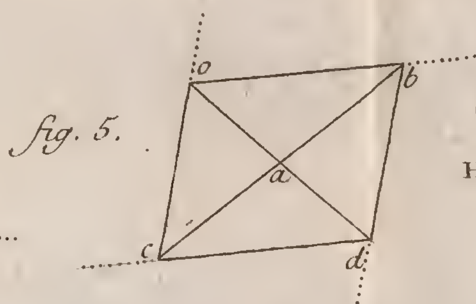


fig. 5.

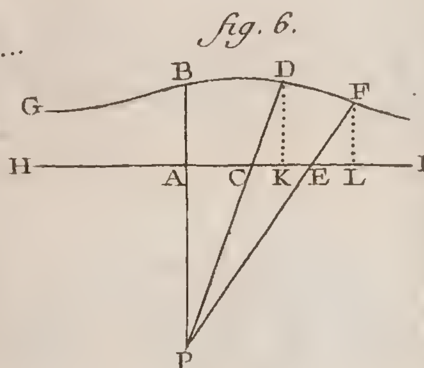
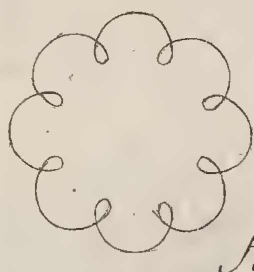


fig. 6.



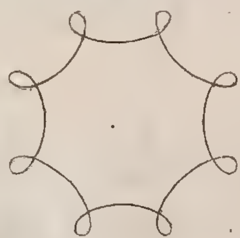
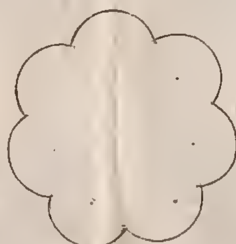


fig. 7.



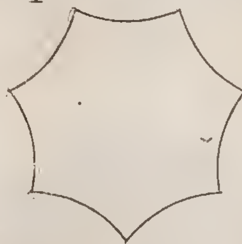


fig. 8.

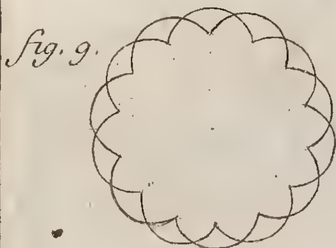


fig. 9.

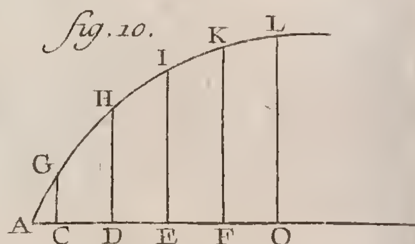


fig. 10.

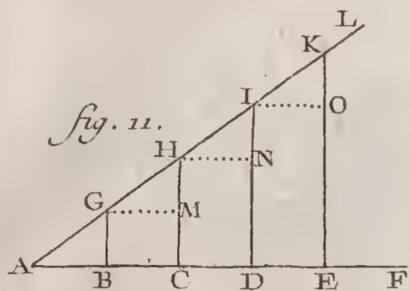


fig. 11.

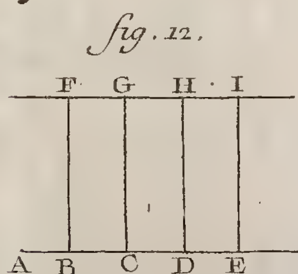


fig. 12.

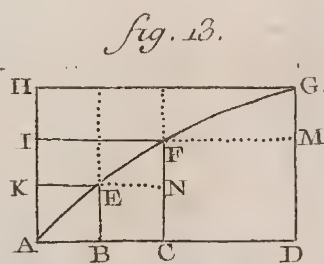


fig. 13.

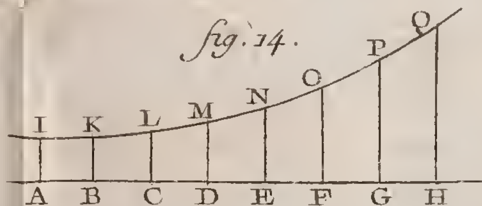


fig. 14.

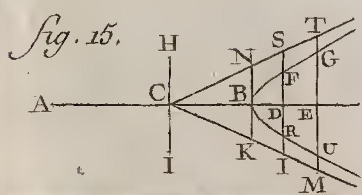


fig. 15.

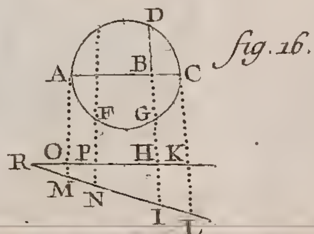


fig. 16.



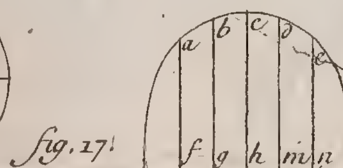


fig. 17.

à Paris chés Hecquet place Cambray à l'image S. Maur

T

Tab. 9.

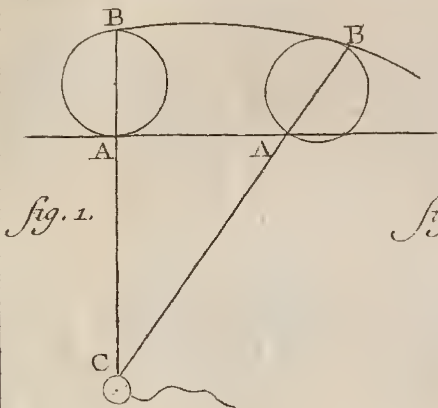


fig. 1.

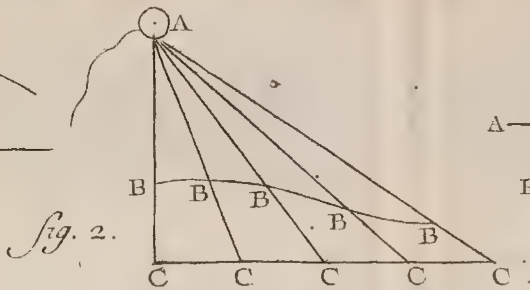


fig. 2.

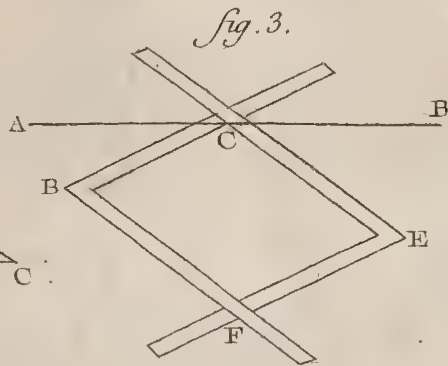


fig. 3.

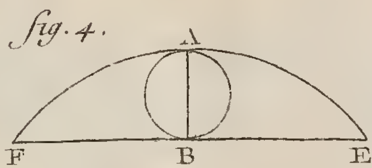


fig. 4.

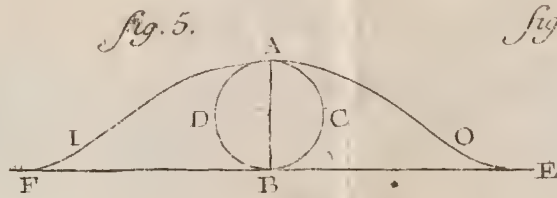


fig. 5.

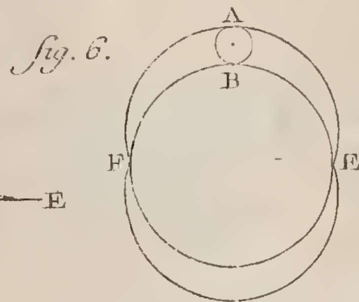
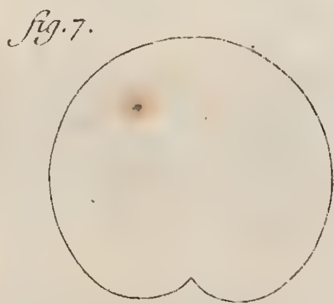


fig. 6.


fig. 7.

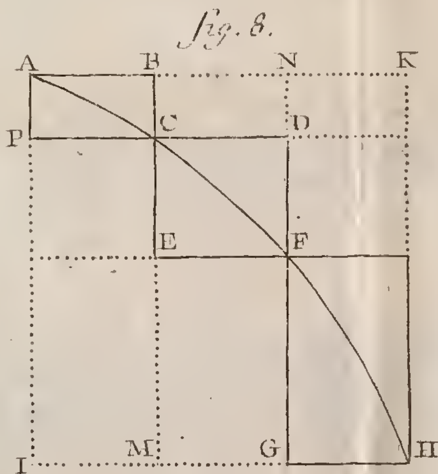


fig. 8.

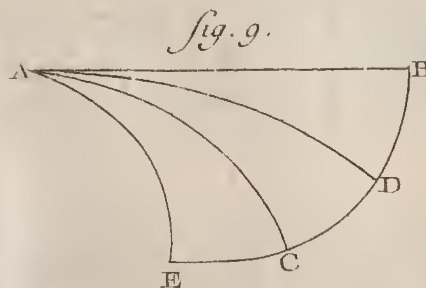


fig. 9.

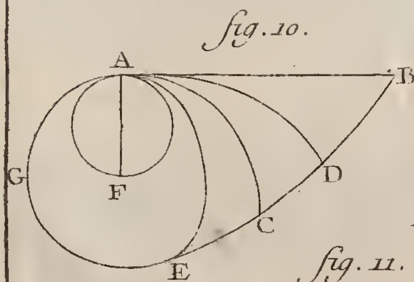


fig. 10.

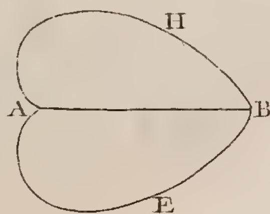


fig. 11.

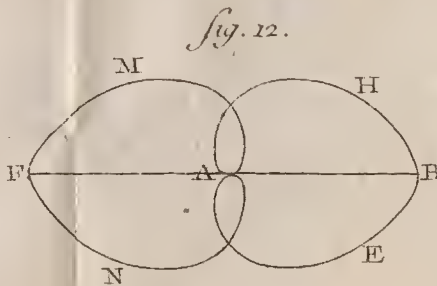
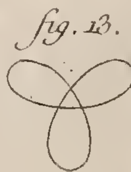
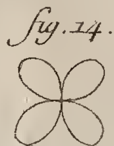
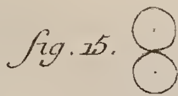
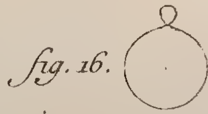


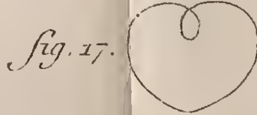
fig. 12.

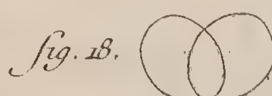

fig. 13.

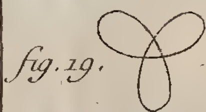

fig. 14.

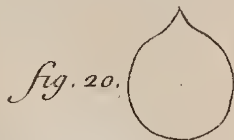

fig. 15.

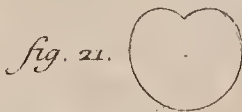

fig. 16.

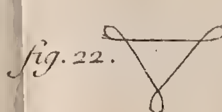

fig. 17.

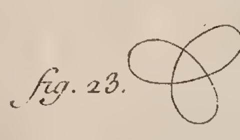

fig. 18.


fig. 19.


fig. 20.

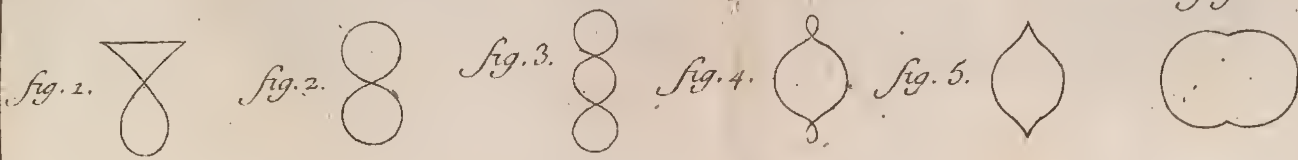

fig. 21.

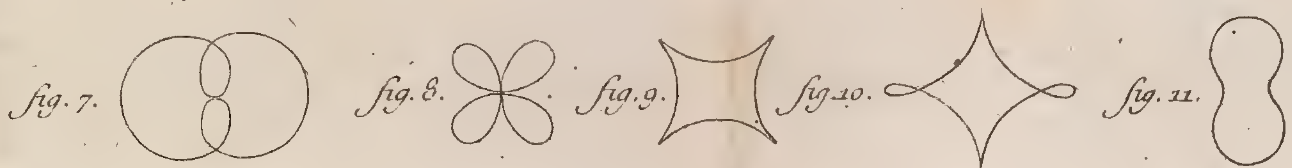

fig. 22.

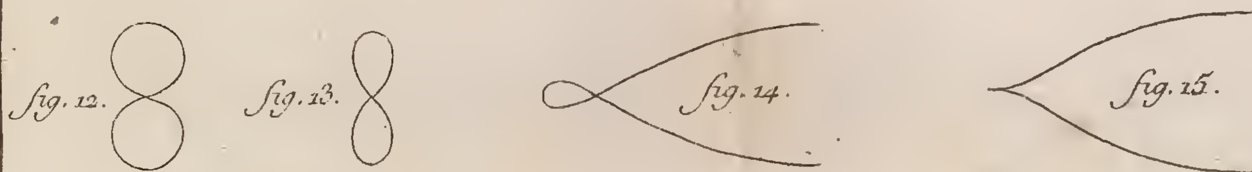

fig. 23.

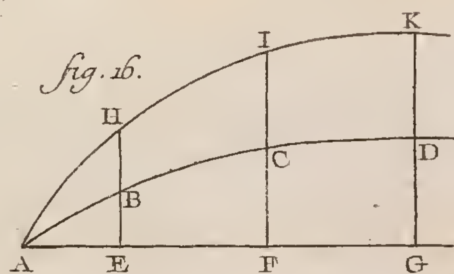
à Paris chés Hecquet place Cambray à l'image S. Maur

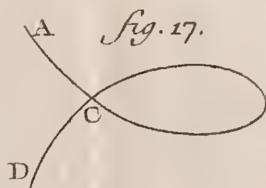
Tab. 10.

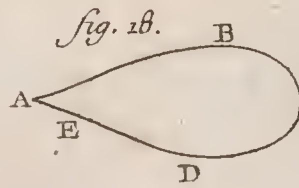


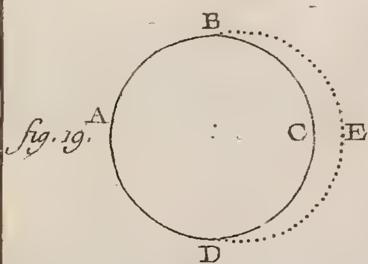


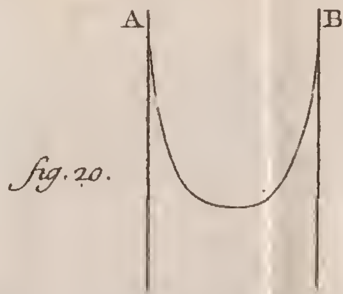


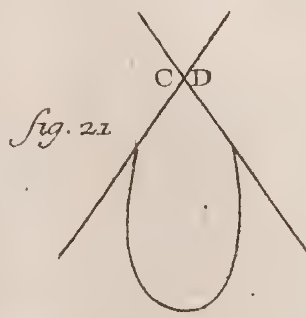


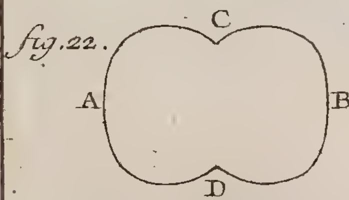


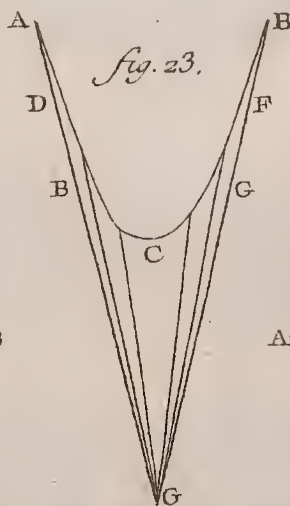


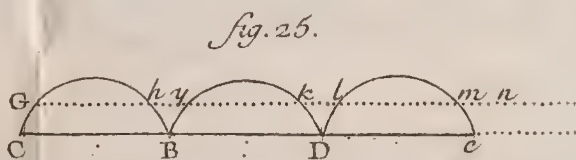


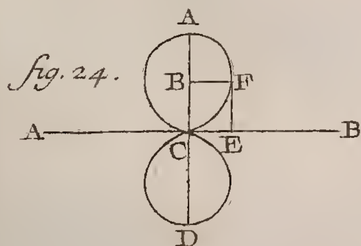


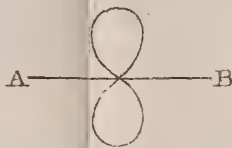


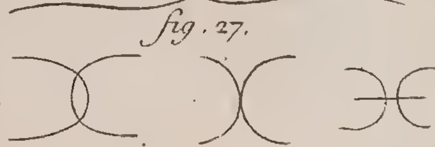






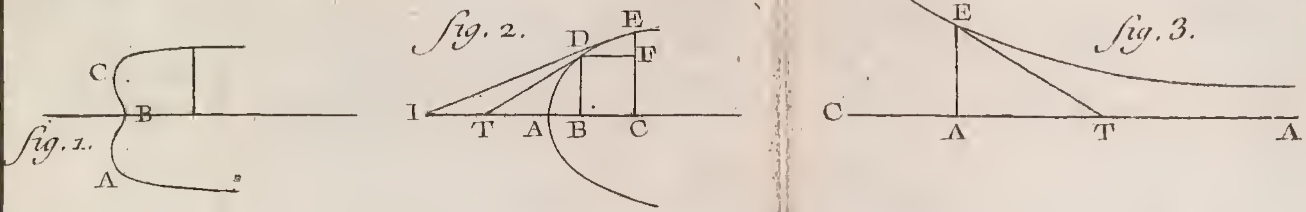


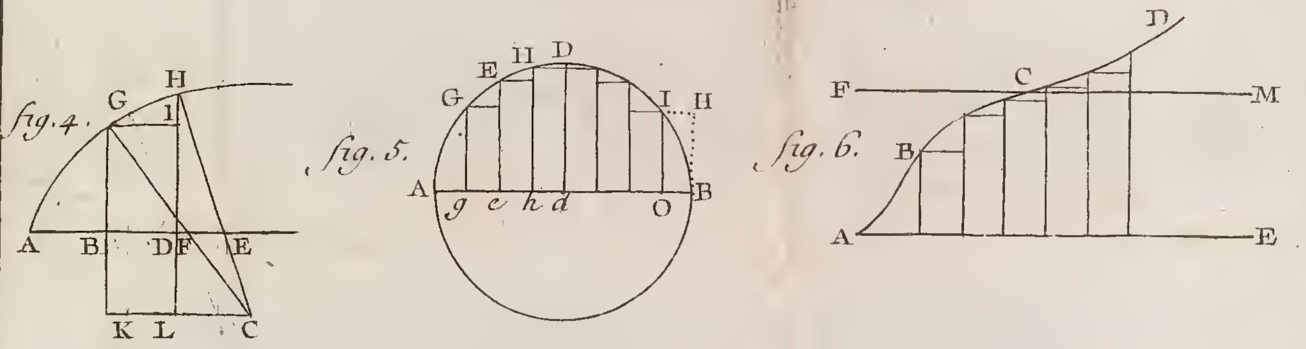


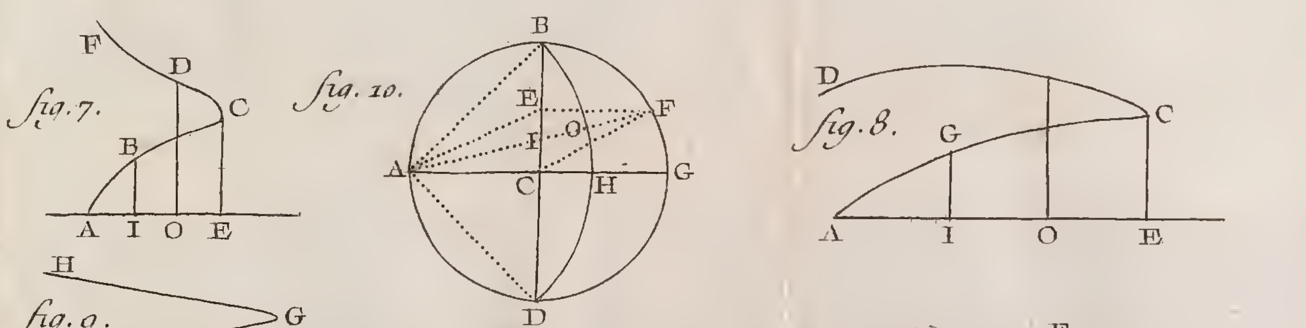


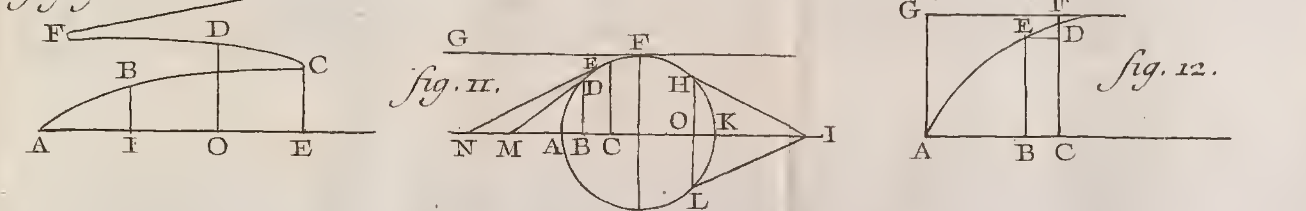
à Paris chés Hecquet place Cambray à l'image S. Maur.

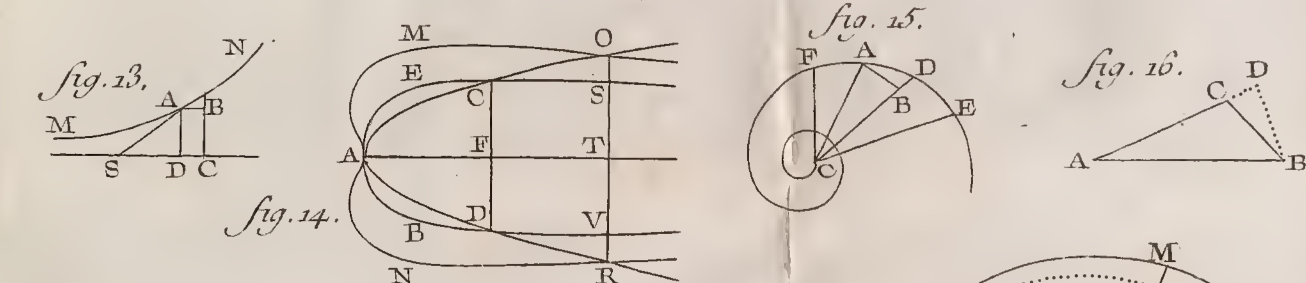
Tab. 11.

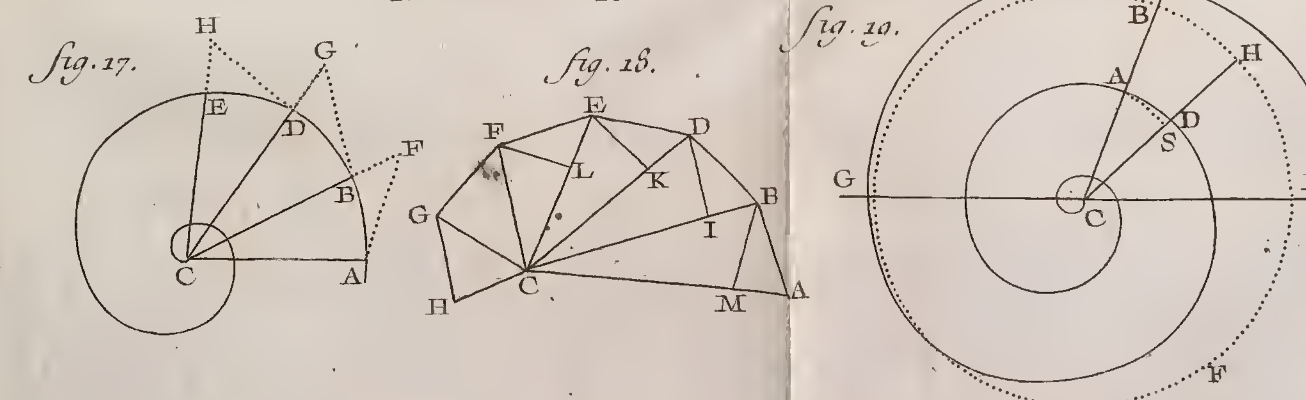










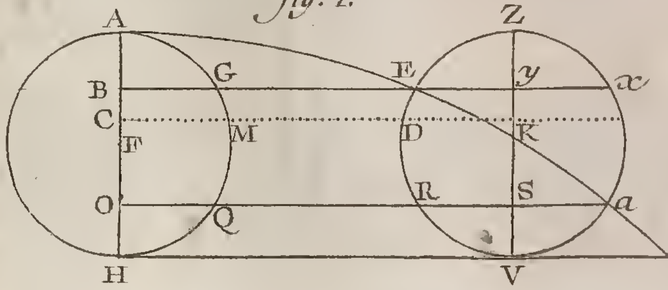


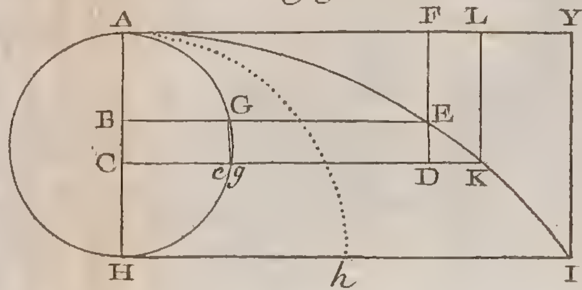
à Paris chés Hecquet place Cambray à l'image S. Maur

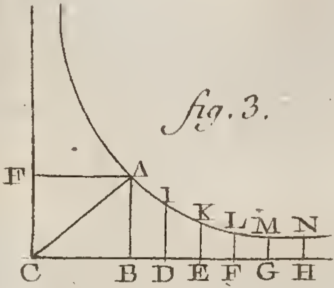
Tc

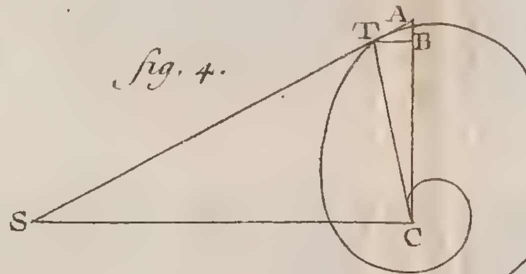
F

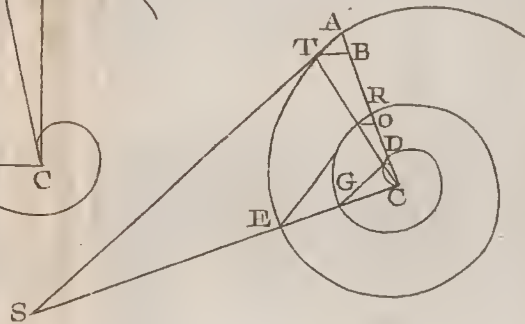
Tab. 12.

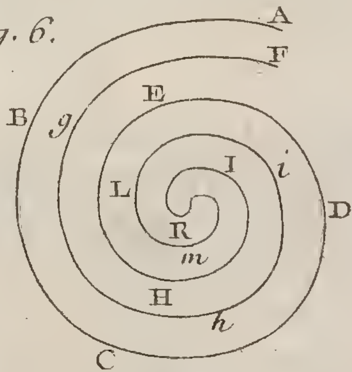


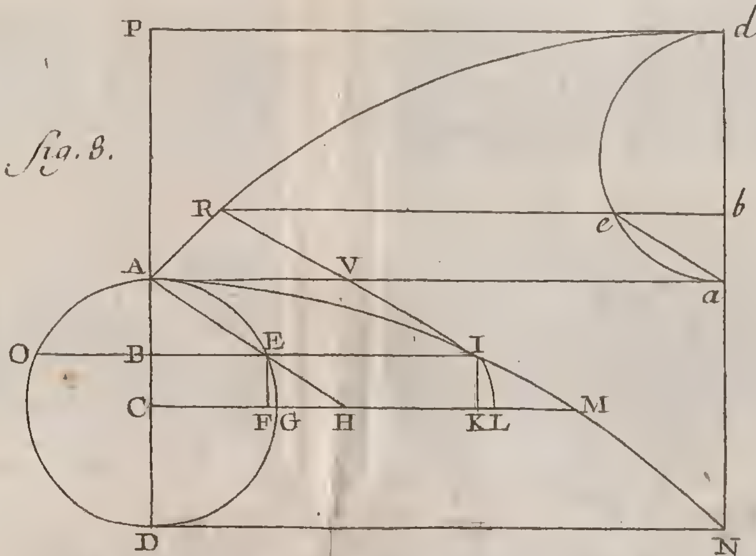


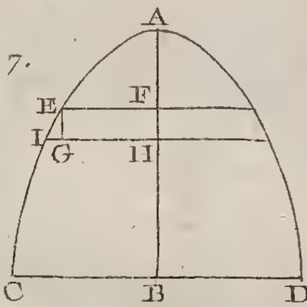


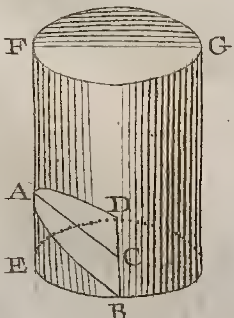


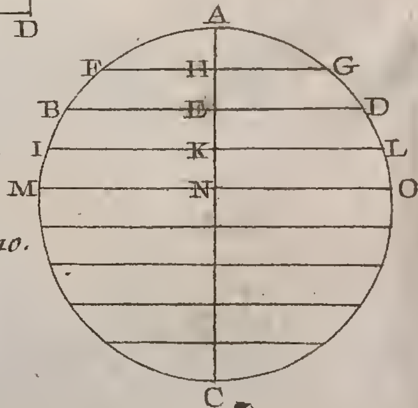


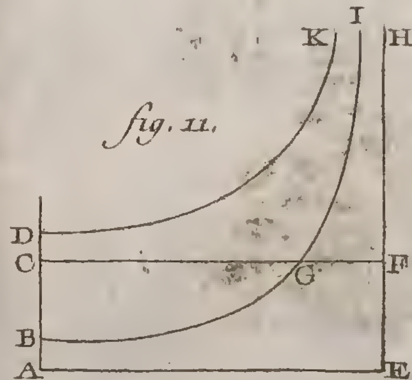






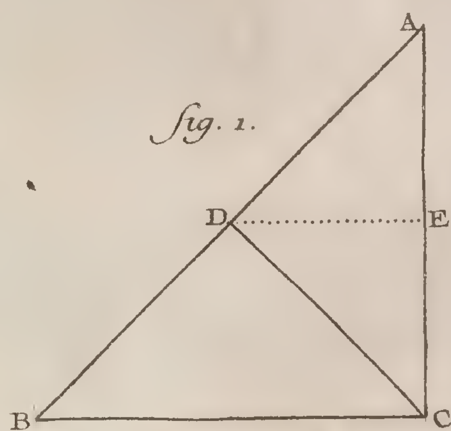


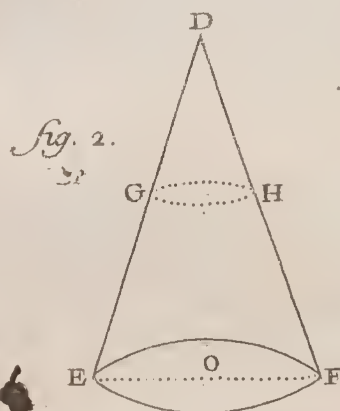


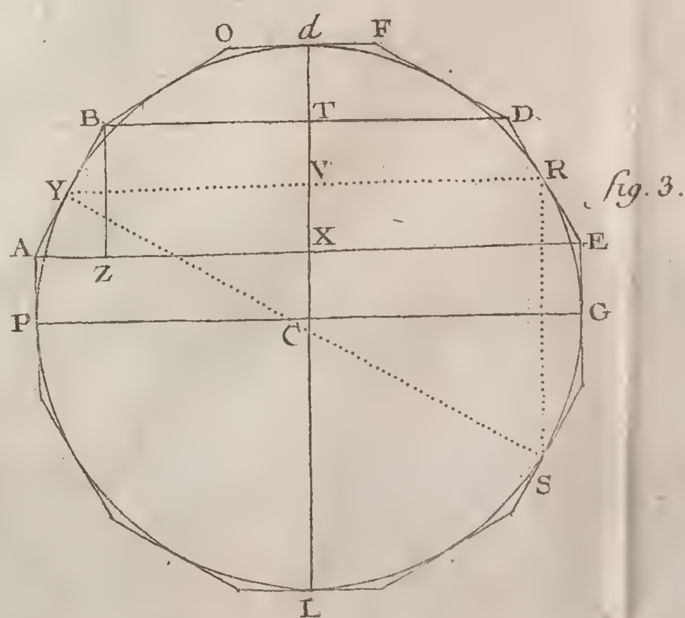


a Paris chés Hecquet place Cambray à l'image S. Maur

Tab. 13.







a Paris chez Hecquet place Cambray à l'image S. Maur.

